PROBLEMAS NO RUTINARIOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

Juan Manuel Conde
Juan Matías Sepulcre

PIRÁMIDE

PROBLEMAS NO RUTINARIOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

JUAN MANUEL CONDE
JUAN MATÍAS SEPULCRE
PROFESORES TITULARES DE UNIVERSIDAD. DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DE ALICANTE

PROBLEMAS NO RUTINARIOS DE NÚMEROS COMPLEJOS

EDICIONES PIRÁMIDE

COLECCIÓN «CIENCIA Y TÉCNICA»

Edición en versión digital

Para cualquier información pueden dirigirse a piramide_legal@anaya.es
Juan Ignacio Luca de Tena, 15. 28027 Madrid
Teléfono: 91 393 89 89
www.edicionespiramide.es
ISBN digital: 978-84-368-4611-9

Índice general

Prefacio

El objetivo principal de esta obra, que nace de nuestro interés docente en torno a las técnicas de resolución de problemas, es introducir al lector en el atractivo y sugerente tema de los números complejos.

Los números complejos son una herramienta esencial de trabajo de diversas ramas de matemáticas puras, como el álgebra y el análisis matemático (la variable compleja en particular), así como de matemáticas aplicadas, física e ingeniería. Mediante un amplio espectro de problemas de diferentes niveles de dificultad, la gran mayoría *no rutinarios* —de ahí el título elegido—, el libro recorre conceptos clave y depara una gran variedad de resultados y técnicas elementales para abordar las diferentes situaciones que se presentan para resolverlos. Así, a través de esta colección el lector podrá apreciar la utilidad de los números complejos y su estrecha relación con distintos temas como la geometría euclídea, la trigonometría, la resolución de ecuaciones, la determinación de desigualdades, igualdades y extremos o la combinatoria, pero también con varias cuestiones de olimpiadas matemáticas de diversos países que siguen manteniendo y desarrollando la tradición de la matemática elemental, en la que se recoge la esencia de la resolución de problemas.

El libro se compone de nueve capítulos: el primero de ellos es una breve introducción histórica a los números complejos, en la que se pretende hacer hincapié en el esfuerzo enorme que supuso su aceptación, conceptualización y formalización, cuyo proceso duró más de 200 años; el segundo capítulo contiene la relación de todos los enunciados de los problemas, agrupados por apartados, que componen esta obra; en los restantes capítulos (del tercero al noveno) se muestra la resolución de estos problemas. En cada uno de estos siete capítulos se incide en la profundización de los conceptos involucrados y en el manejo algebraico de lo indicado en su correspondiente epígrafe: propiedades básicas preliminares; identidades, igualdades y desigualdades; raíces de polinomios; resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, y correspondencia con la trigonometría y la geometría del plano.

Los problemas elegidos ilustran los aspectos señalados, y en su resolución se incluyen, si se considera necesario, las definiciones y resultados precisos que permiten una formalización rigurosa y una comprensión clara. Los dos últimos capítulos son más abiertos y exigen usar de manera eficaz los recursos de los capítulos anteriores, además de resultados que constituyen el acervo común de conocimientos propios de la matemática elemental. A continuación se detallan los contenidos tratados a través de los problemas seleccionados.

El capítulo 3, que consta de cincuenta y cinco problemas (1-55), se centra en las propiedades básicas preliminares, como el uso de las formas binómica, trigonométrica y exponencial del número complejo, su representación geométrica asociada, el cálculo y propiedades de las raíces n-ésimas de la unidad, y el empleo apropiado del módulo y la conjugación. También se introducen las expresiones del seno, coseno, tangente y logaritmo de un número complejo. En el caso del logaritmo, el tratamiento es somero, pues su utilización y propiedades se sitúan más propiamente en el estudio de las funciones de variable compleja, una disciplina que no abordaremos formalmente, por haberla impuesto como uno de los límites del cometido de esta obra.

En el capítulo 4, que consta de cincuenta y tres problemas (56-108), se estudian las propiedades intrínsecas de los números complejos, como módulo, producto, cociente y potencia, para establecer distintas identidades, igualdades y desigualdades propias de estos números. En particular, se tratan las demostraciones de algunas igualdades y desigualdades clásicas. Finalmente se incluyen también problemas en los que distintas propiedades conducen a la determinación de máximos y mínimos de expresiones dadas.

En el capítulo 5, que consta de cuarenta problemas (109-148), se determinan raíces de polinomios de indeterminada compleja, y propiedades de las mismas, mediante resolución directa o con el uso de las relaciones de Cardano-Vieta.

En el capítulo 6, que consta de veintisiete problemas (149-175), se resuelven ecuaciones y sistemas de ecuaciones en los que intervienen el módulo, la conjugación y potencias de números complejos. El lector podrá observar, especialmente después de analizar la solución proporcionada, que muchos de los problemas de los últimos cuatro capítulos se podrían haber encuadrado al mismo tiempo en varias secciones, ya que las herramientas utilizadas son comunes a varios apartados.

En el capítulo 7, que consta de cuarenta problemas (176-215), se relacionan los números complejos con la trigonometría plana, recuperando de manera sencilla propiedades conocidas de las funciones trigonométricas elementales y obteniendo otras de mayor dificultad. La segunda parte de este capítulo se relaciona con la geometría plana, tanto sintética como euclídea, caracterizando por ejemplo, fácilmente y de varios modos, que los afijos de tres números complejos sean los vértices de un triángulo equilátero o determinando de forma concisa lugares geométricos. Aunque somos conscientes de que el lenguaje de los números complejos describe fielmente la geometría del plano y permite obtener de modo eficaz muchísimas de sus propiedades, deliberadamente se ha ofrecido solo un reducido grupo de problemas, lo que deja abierta la puerta a un desarrollo más exhaustivo y profundo. Este sería otro de los límites autoimpuestos en la confección de esta colección de problemas.

El capítulo 8, que consta de cuarenta y seis problemas (216-261), presenta cuestiones de diversa índole que requieren un enfoque adecuado, un uso preciso de los conceptos involucrados, y un desarrollo algebraico ágil y apropiado. Se tratan problemas relacionados con sucesiones recurrentes, ecuaciones funcionales, combinatoria, cálculo de ciertas sumas y productos, curvas o divisibilidad de polinomios. Podríamos considerar que este capítulo de miscelánea es antesala del capítulo siguiente, en el que se aplica la conocida máxima de que el aprendizaje de la resolución de problemas solo es posible resolviendo más problemas.

El capítulo 9, que consta de noventa y dos problemas (262-353), refleja el enorme interés de los números complejos en el contexto del planteamiento de problemas elementales, nada triviales, que surgen en foros como la IMO (Olimpiada Internacional de Matemáticas), las competiciones rumanas de matemática (RMC), la olimpiada china de matemáticas e incluso olimpiadas de nivel universitario, como la competición Schweitzer de Hungría o la William Lowell Putnam Competition de Estados Unidos y Canadá, entre las más importantes. Aparecen problemas, bien propuestos, cuya resolución con éxito requiere de una buena dosis de intuición, de esfuerzo, de atención a todos los detalles, de notación adecuada y de formalismo preciso. Creemos que la incorporación de este capítulo está justificada por el valor adicional de cada uno de sus problemas.

Dado que los problemas tratados cubren distintos temas de matemática elemental, la obra se dirige a un amplio público interesado en el estudio de esta matemática y, especialmente, en los números complejos. En particular, los estudiantes de bachillerato y universidad (en distintos grados de Ciencias e Ingenierías), concursantes de olimpiadas matemáticas y sus profesores, podrían reflexionar y forcejear con estos problemas, que sirven además para desarrollar una cierta agilidad mental y creatividad matemática. Pensamos que los problemas elegidos en este libro podrían contribuir a subrayar la riqueza inherente a los números complejos y a que ocupen su lugar natural, no subsidiario, en las matemáticas.

Finalmente, deseamos expresar aquí nuestro agradecimiento al profesor Salvador Sánchez-Pedreño, de Ediciones Electolibris, por su ayuda, esfuerzo, meticulosidad e interés en la composición, corrección y redacción final de la obra.

Los autores
Alicante, enero de 2022

Capítulo 1

Breve historia del nacimiento de los números complejos

Los números complejos se emplean con asiduidad para estudiar ecuaciones con coeficientes y variables reales. El uso de los mismos en análisis, álgebra, geometría y teoría de números es tan universal que sin ellos las matemáticas actuales no existirían. De hecho, constituyen también una herramienta esencial de trabajo de algunas ramas de matemáticas aplicadas y física, como las ecuaciones diferenciales, aerodinámica, hidrodinámica, electromagnetismo, mecánica cuántica, electrónica o telecomunicaciones.

A continuación relatamos cronológicamente varias situaciones que influyeron de forma notable en el proceso de aceptación, conceptualización y formalización de los números complejos (véase también [10, 34, 35], entre otras referencias).

En primer lugar hemos de destacar que se tienen pocas referencias de raíces cuadradas de números negativos en la antigüedad. Sin embargo, un ejemplo importante lo proporciona Herón de Alejandría en el siglo I, a través de la obra *Stereometrica*, quien en su afán de calcular de forma precisa la altura de una pirámide truncada de base cuadrada se encontró con la expresión $\sqrt{81-144}$ y él o algún escribano lo escribió como $\sqrt{144-81}$, prefiriendo no darle importancia al asunto. Si partimos de que el cambio se hizo a conciencia, podemos darnos cuenta del pavor que producía la raíz cuadrada de un número negativo. De manera análoga, en el siglo III, Diofanto de Alejandría se encontró con una ecuación de raíces de números negativos al intentar construir un triángulo rectángulo con una cuerda en la que había realizado 12 nudos equidistantes, y de manera que su área fuese de 7 unidades. En efecto, si llamamos b a la longitud de un cateto, el otro cateto debe medir $\frac{14}{b}$ (para que el área sea 7) y además la longitud h de la hipotenusa debe cumplir $h^2 = b^2 + (\frac{14}{b})^2$ (por ser un triángulo rectángulo) y $b + \frac{14}{b} + h = 12$ (por tener perímetro igual a 12), por lo que se llega a la igualdad

$$b^2 + \frac{196}{b^2} = \left(12 - b - \frac{14}{b}\right)^2,$$

que equivale a

$$6b^2 - 43b + 84 = 0,$$

cuyas soluciones (no reales) sabemos que vienen dadas por

$$b = \frac{43 \pm \sqrt{-167}}{12}.$$

A este respecto, las expresiones de raíces con radicando negativo aparecían, de manera casual, al aplicar la fórmula bien conocida de Herón,

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

relativa al área de un triángulo de semiperímetro $s = (a+b+c)/2$ cuando las longitudes a, b, c de los tres segmentos no forman triángulo. Más adelante, los matemáticos hindúes Mahavira (alrededor del año 850) y Bhaskara (sobre el año 1150) precisaron que ningún número negativo es un cuadrado, en base a que asumían firmemente la imposibilidad de la raíz cuadrada de un número negativo.

Por otra parte, los métodos del álgebra conocida por los árabes se introdujeron en Italia mediante la traducción al latín del tratado de álgebra del matemático, astrónomo y geógrafo persa al-Khwarizmi (780-850). Esta tarea la llevaron a cabo especialmente Gerardo de Cremona (1114-1187) y Leonardo de Pisa (1170-1250), conocido como Fibonacci. En 1225 un matemático local en la corte de Sicilia, regentada por Federico II, propuso varios problemas a Fibonacci, que los resolvió sin dificultad. Uno de ellos consistía en encontrar la solución de la ecuación de tercer grado $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$, cuya resolución analizaremos a continuación.

El lector puede comprobar fácilmente que la ecuación general de tercer grado $x^3+ax^2+bx+c = 0$ puede ser reducida a la forma más simple $x^3 = px+q$ mediante el cambio de variable $x' = x+\frac{a}{3}$, que geométricamente significa trasladar el punto de inflexión de la cúbica al origen de coordenadas. Este cambio de variable aparece por primera vez en dos manuscritos florentinos anónimos de finales del siglo XIV. Esta ecuación cúbica reducida fue estudiada por Scipione Del Ferro (1465-1526), profesor de la Universidad de Bolonia, que en su lecho de muerte le confió su fórmula de resolución (inicialmente conservada como un tesoro) a su alumno Antonio Maria del Fiore. En 1535, Fiore escuchó que otro matemático, Niccolò Fontana (1499-1557), apodado Tartaglia, estaba trabajando con cierto éxito en la resolución de la ecuación de tercer grado, y le desafió a una competición matemática pública para resolver problemas relacionados con la ecuación cúbica. Para su sorpresa, la noche anterior Tartaglia redescubrió la fórmula por sí mismo y ganó el concurso.

Posteriormente, Tartaglia confió su fórmula a Gerolamo Cardano (1501-1576), pero sin demostración, y este juró guardarla en secreto. A su vez, Cardano fue capaz de deducir de la fórmula una demostración de la misma, y después confirmó que Del Ferro la conocía y procedió a publicarla en el *Ars Magna* (1545). Cardano menciona a Del Ferro como primer autor, y también que Tartaglia había obtenido dicha fórmula de manera independiente. A partir de la expresión numérica dada por la fórmula utilizada para resolver $x^3 = px + q$, resulta que en el caso en que q sea positivo puede aparecer la dificultad de tener raíces cuadradas con números negativos, lo que comprobaremos a continuación presentando el modo clásico de resolución de las ecuaciones cúbicas que no tienen término de grado dos. En efecto, inicialmente se sustituye $x = u + v$ en la expresión $x^3 = px + q$ y se obtiene

$$x^3 - px = u^3 + v^3 + 3uv(u + v) - p(u + v) = q.$$

Si tomamos u y v tal que $3uv = p$, se obtiene claramente $u^3 + v^3 = q$ y también $u^3v^3 = \left(\frac{p}{3}\right)^3$. Por tanto, $u^3(q - u^3) = \left(\frac{p}{3}\right)^3$ y $(u^3)^2 - q(u^3) + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0$, obteniendo

$$u^3 = \frac{q}{2} \pm w \quad \text{y} \quad v^3 = q - u^3 = \frac{q}{2} \mp w,$$

con $w = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$. En consecuencia,

$$x = u + v = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + w} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - w}.$$

Así, el llamado caso *irreducible* aparece si el radicando de

$$\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

es negativo. Sin embargo, Cardano no discutió este caso en su obra *Ars Magna*.

Cardano también propuso un método, desarrollado junto con Ludovico Ferrari, (1522-1565) para hallar las soluciones de las ecuaciones de cuarto grado. Otro de los renombrados problemas que Cardano propuso en su *Ars Magna* fue expresar 10 como suma de dos números de forma que el producto de ambos sea 40, es decir, ambos números debían satisfacer las igualdades $x + y = 10$ y $x \cdot y = 40$, que conducían a la ecuación $x + \frac{40}{x} = 10$ o, equivalentemente, $x^2 - 10x + 40 = 0$, con soluciones $5 \pm \sqrt{-15}$. Aunque se rechazaba la solución, Cardano escribió explícitamente, por primera vez y de manera simbólica, la raíz cuadrada de un número negativo, multiplicando formalmente $5 + \sqrt{-15}$ por $5 - \sqrt{-15}$ y obteniendo el valor 40. Por tanto, y en consonancia con la opinión del matemático e historiador B. L. van der Waerden (1903-1996), expresada en su obra *History of Algebra* de 1985, Cardano fue el primero en introducir los números complejos $a + \sqrt{-b}$ en el álgebra, aunque todo indica que el propio Cardano tenía serias dudas y únicamente los manejó en términos simbólicos.

Casi tres décadas después de la publicación de *Ars Magna*, Rafael Bombelli (1526-1572) fue el autor de una obra de tres tomos, denominada *El Álgebra*, publicada en 1572 (con una nueva edición en 1579), e introdujo una notación para $\sqrt{-1}$, a la que llamó *più di meno* (más menos). Aparte de estudiar lo realizado por Cardano para la ecuación cúbica, en esta obra Bombelli hace una discusión completa del llamado caso irreducible. En particular, consideró la ecuación cúbica $x^3 = 15x + 4$, que mediante la fórmula de Cardano expuesta anteriormente conduce a una raíz dada por la expresión

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}.$$

A su vez, Bombelli observó que $x = 4$ es solución de la cúbica dada (de hecho, las otras dos raíces, $-2 \pm \sqrt{3}$, son también reales). Esto le llevó a indicar, de forma intrépida, que

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = a + b\sqrt{-1} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = a - b\sqrt{-1}$$

debido a que sus radicandos difieren solamente en ese signo. Por tanto, manipulando estas expresiones de acuerdo a las reglas establecidas para variables reales, dedujo que

$$\begin{aligned} 2+\sqrt{-121} &= \left(a+b\sqrt{-1}\right)^3 = a^3 + 3a^2b\sqrt{-1} + 3ab^2\left(\sqrt{-1}\right)^2 + b^3\left(\sqrt{-1}\right)^3 = \\ &= a(a^2-3b^2) + b(3a^2-b^2)\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

lo que le llevó a que $a(a^2-3b^2) = 2$ y $b(3a^2-b^2) = 11$. Al considerar únicamente valores enteros para a y b, resulta que $a, b \in \{1, 2\}$ y la única combinación posible era $a = 2$ y $b = 1$. Así, $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$. Es decir, se sumaron dos expresiones *sin sentido* con las reglas de los números reales y, mediante un *salto en el vacío*, se llegó felizmente a un número real que encajaba con lo preestablecido.

Ya en el siglo XVII, el matemático y filósofo René Descartes (1596-1650) publicó tres apéndices, a modo de ensayos, a su obra *Discurso del Método* (1637). En el tercero de ellos, titulado *La Géométrie*, en el cual describió sus ideas geométricas aplicadas al álgebra, asoció los entes $a+b\sqrt{-1}$ con la imposibilidad geométrica. Fue el primero en acuñar el término *imaginario* y, de hecho, escribió: *Para cualquier ecuación uno puede imaginar tantas raíces como su grado sugiere, pero en muchos casos no existe ninguna cantidad que corresponda a lo que uno imagina.*

Posteriormente, Leonhard Euler (1707-1783) introdujo la actual notación

$$\sqrt{-1} = i$$

y visualizó los números complejos mediante coordenadas rectangulares. Utilizó la fórmula $x + iy = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, $r > 0$, para observar que las raíces de $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N}$, tienen por afijos los vértices de un polígono regular de n lados de centro el origen de coordenadas. Aunque Euler no pudo dar un fundamento totalmente riguroso de los números complejos, fue él quien definió la exponencial compleja $e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, y probó la identidad $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$. Si tomamos $\theta = \pi$, se obtiene la notable identidad $e^{\pi i} + 1 = 0$, que relaciona los cinco números fundamentales: $0, 1, e, \pi, i$ (véase la figura 1.1). A este respecto conviene mencionar la hoy en día llamada *fórmula de De Moivre*,

$$\left(\cos\theta + \sqrt{-1}\operatorname{sen}\theta\right)^n = \cos(n\theta) + \sqrt{-1}\operatorname{sen}(n\theta), \ n \in \mathbb{N},$$

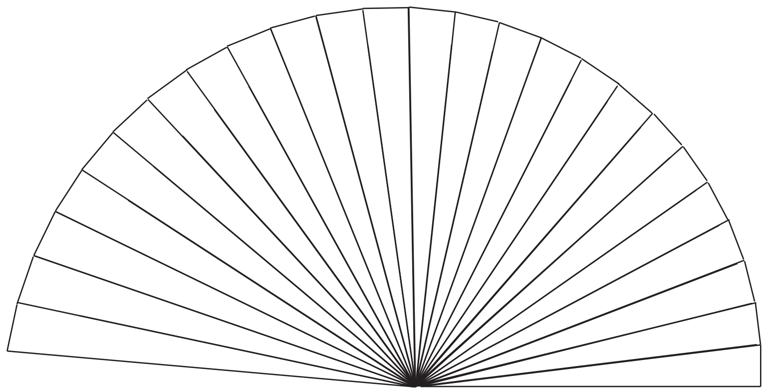

Figura 1.1: Interpretación geométrica de $\left(1+\frac{i\pi}{N}\right)^N$, con $N=25$. Cuando $N\to\infty$ obtenemos $e^{i\pi}=-1$, que da lugar a la conocida *identidad de Euler*, $e^{i\pi}+1=0$, que relaciona cinco números fundamentales.

que fue establecida en la primera treintena del siglo XVIII por Abraham de Moivre (1667-1754) a partir de un trabajo previo realizado por Roger Cotes (1682-1716). Al parecer, Isaac Newton (1643-1727), amigo de Abraham de Moivre, ya conocía esta identidad desde 1676.

Los números complejos fueron ya bastante utilizados en el siglo XVIII. Por ejemplo, Gottfried von Leibniz (1646-1716) y Johann Bernoulli (1667-1748) los usaron en el cálculo de varias integrales y en la obtención de algunas primitivas como la siguiente:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \int \frac{1}{(x+ai)(x-ai)}\,dx = -\frac{1}{2ai}\int\left(\frac{1}{x+ai}-\frac{1}{x-ai}\right)dx =$$
$$= -\frac{1}{2ai}\big(\log(x+ai)-\log(x-ai)\big).$$

Aunque carente de formalismo, este tipo de razonamiento llevó a Johann Bernoulli a expresar la función arco tangente (salvo constantes) en términos del logaritmo complejo, generando así una gran polémica sobre la existencia del logaritmo de números negativos y números complejos. A este respecto, tuvo lugar un acalorado debate entre Bernoulli y Leibniz, ya que Leibniz supuso que $\log i = 0$, debido a que $2\log(-1)=\log(-1)^2=\log 1 = 0$, y por tanto $2\log i = \log i^2 = \log(-1) = 0$. Sin embargo, Bernoulli proponía que $\log i = \frac{\pi i}{2}$. La controversia la resolvió parcialmente

Euler con la identidad antes indicada $e^{\pi i} = -1$, de la que se deduce que un logaritmo de -1 es πi y, por tanto, el razonamiento de Leibniz no era correcto.

A pesar de los trabajos de Cardano, Del Ferro, Bombelli, Euler, Leibniz, Bernoulli..., muchos matemáticos repelían o ignoraban estos nuevos números, en ocasiones catalogados como *inexplicables*, *imposibles*, *imaginarios*, *sin sentido*, *incomprensibles* o *sofisticados*, en gran parte debido a que aún no se había dado una representación geométrica. A este respecto, John Wallis (1616-1703) presentó en 1685 una primera representación, que desde nuestro punto de vista fue muy importante para desvincular por primera vez a los números complejos de la recta real. En concreto, consideró una ecuación de segundo grado con el término independiente no negativo, $x^2+2bx+c^2 = 0$, y representó sus raíces, dadas por $x = -b\pm\sqrt{b^2 - c^2}$, del siguiente modo: si $b \geq c$, se considera en el eje real el punto $(-b, 0)$ como pie de la altura de longitud c cuya base es el lado desigual del triángulo isósceles de lados iguales de longitud b y de vértices $P(-b, c)$, $Q_1(-b - \sqrt{b^2 - c^2}, 0)$ y $Q_2(-b + \sqrt{b^2 - c^2}, 0)$, donde Q_1 y Q_2 están sobre el eje real. Si $b < c$, el triángulo anterior no tendría sentido (ahora los puntos análogos a Q_1 y Q_2 seguirían en los extremos del lado de longitud b, pero no tocarían la recta real) y entonces se considera el cuadrilátero de vértices $P(-b, c)$, $P'(-b, 0)$ y R_1, R_2, tales que $PR_1 = PR_2 = b$ y $P'R_1P$, $P'R_2P$ son triángulos rectángulos de hipotenusa común PP' (y R_1, R_2 son puntos que no están en la recta real).

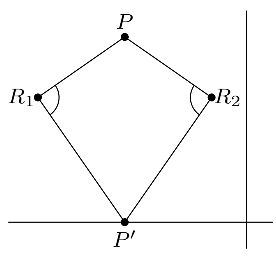

Figura 1.2: Construcción de Wallis.

El enorme mérito de Wallis fue representar expresiones que contenían raíces cuadradas de números negativos fuera del eje real, lo que constituye un precedente al trabajo de Jean-Robert Argand (1768-1822), que publicó en 1806 un ensayo sobre la interpretación geométrica de cantidades imaginarias. En efecto, lo que se conoce como *diagrama de Argand* es la representación de $a + bi$ en el plano cartesiano por el punto de coordenadas (a, b). Anteriormente, aunque sin recibir en su día atención alguna, esta fundamental representación también la descubrió el noruego Caspar

TÍTULOS PUBLICADOS

ÁLGEBRA LINEAL, *R. E. Larson, B. H. Edwards, D. C. Falvo, L. Abellanas Rapún.*
ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA, *P. Alberca Bjerregaard y D. Martín Barquero.*
ANÁLISIS DE DATOS EN LAS CIENCIAS DE LA ACTIVIDAD FÍSICA Y DEL DEPORTE, *M.ª I. Barriopedro y C. Muniesa.*
CÁLCULO, *P. Alberca Bjerregaard y D. Martín Barquero.*
CURSO DE GENÉTICA MOLECULAR E INGENIERÍA GENÉTICA, *M. Izquierdo Rojo*
ECOLOGÍA, *J. Rodríguez.*
ECUACIONES DIFERENCIALES II, *C. Fernández Pérez y J. M. Vegas Montaner.*
ELASTICIDAD Y RESISTENCIA DE MATERIALES, *M. Solaguren-Beascoa Fernández.*
ENZIMOLOGÍA, *I. Núñez de Castro.*
FÍSICA CUÁNTICA, *C. Sánchez del Río (coord.).*
FISIOLOGÍA VEGETAL, J. *Barceló Coll, G. Nicolás Rodrigo, B. Sabater García y R. Sánchez Tamés.*
FLEXIBILIDAD. Nuevas metodologías para el entrenamiento de la flexibilidad, *E. H. M. Dantas, M. C. de S. C. Conceição y A. Alías (coords.).*
INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES, *J. A. Facenda Aguirre, F. J. Freniche Ibáñez.*
INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA Y SUS APLICACIONES, *R. Cao Abad, M. Francisco Fernández, S. Naya Fernández, M. A. Presedo Quindimil, M. Vázquez Brage, J. A. Vilar Fernández, J. M. Vilar Fernández.*
MATEMÁTICAS BÁSICAS PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD, *Á. M. Ramos del Olmo y J. M.ª Rey Cabezas*
MÉTODOS NUMÉRICOS. Teoría, problemas y prácticas con MATLAB, *J. A. Infante del Río y J. M.ª Cabezas.*
PROBLEMAS, CONCEPTOS Y MÉTODOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO. 1. Números reales, sucesiones y series, *M. de Guzmán y B. Rubio.*
PROBLEMAS, CONCEPTOS Y MÉTODOS DEL ANÁLISIS MATEMÁTICO. 2. Funciones, integrales, derivadas, *M. de Guzmán y B. Rubio.*
PROBLEMAS DE GENÉTICA RESUELTOS, Desde Mendel hasta la genética cuantitativa, *M. D. Llobat.*
PROBLEMAS NO RUTINARIOS DE NÚMEROS COMPLEJOS, *J. M. Conde y J. M. Sepulcre.*
SERIES DE FOURIER Y APLICACIONES. Un tratado elemental, con notas históricas y ejercicios resueltos, *A. Cañada Villar.*
TABLAS DE COMPOSICIÓN DE ALIMENTOS, *O. Moreiras, A. Carbajal, L. Cabrera y C. Cuadrado.*
TECNOLOGÍA MECÁNICA Y METROTECNIA, *P. Coca Rebollero y J. Rosique Jiménez.*
TERMODINÁMICA Y CINÉTICA QUÍMICA PARA CIENCIAS DE LA VIDA Y DEL MEDIOAMBIENTE. 100 problemas resueltos, *J. A. Anta, S. Calero y A. Cuetos.*