

FUNDAMENTOS DEL CONTROL LINEAL ROBUSTO

RICARDO SÁNCHEZ-PEÑA - JUAN IGNACIO GIRIBET



MANUALES

FUNDAMENTOS DEL CONTROL LINEAL ROBUSTO

RICARDO SÁNCHEZ-PEÑA - JUAN IGNACIO GIRIBET



Sánchez-Peña, Ricardo

Fundamentos del control lineal robusto / Ricardo Sánchez-Peña ; Juan Ignacio Giribet. - 1a ed. - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Eudeba, 2022.
Libro digital, PDF - (Manuales)

Archivo Digital: descarga
ISBN 978-950-23-3263-5

1. Ingeniería. 2. Física. I. Giribet, Juan Ignacio. II. Título.
CDD 621.04



Eudeba
Universidad de Buenos Aires

1° edición: mayo de 2022

© 2022, Eudeba
Editorial Universitaria de Buenos Aires
Sociedad de Economía Mixta
Av. Rivadavia 1571/73 (1033) Ciudad de Buenos Aires
Tel: 4383-8025 / Fax: 4383-2202
www.eudeba.com.ar

Diseño de tapa: *Silvina Simondet*
Composición y armado: Eudeba

Impreso en la Argentina
Hecho el depósito que establece la ley 11.723



No se permite la reproducción total o parcial de este libro, ni su almacenamiento en un sistema informático, ni su transmisión en cualquier forma o por cualquier medio, electrónico, mecánico, fotocopia u otros métodos, sin el permiso previo del editor.

Este libro está dedicado a Estanislao y Pedro.
R.S.S.P.

Este libro está dedicado a Ema, Gastón, Лара и Зоя
J.I.G.

ÍNDICE

Prólogo	11
Prefacio	13
Siglas y notación	17
Capítulo I. Planteo conceptual	19
A. Fases del problema de control	19
B. Pongamos todo esto en perspectiva	26
Capítulo II. Modelos de sistemas dinámicos	31
A. Funciones de Transferencia	31
B. Variables de estado	38
C. Linealización local	45
D. Relación entre los modelos de estado y la transferencia del sistema	55
E. Controlabilidad y observabilidad	57
F. Interconexión entre modelos	77
G. Implementación de modelos en tiempo real	87
Capítulo III. Fundamentos de control clásico y moderno	91
A. ¿Por qué realimentar?	91
B. Sistemas de segundo orden	95
C. Estabilidad entrada/salida	96
D. Diagrama de Nyquist	99
E. Diagrama de Bode	106
F. Control basado en la función de transferencia	111
G. Control basado en el modelo de estados	121
Capítulo IV. Estabilidad y performance	137
A. Introducción	137
B. Sistemas bien planteados	138
C. Estabilidad interna	140

D. Performance	143
Capítulo V. Robustez	153
A. Estabilidad robusta	153
B. Performance robusta	167
Capítulo VI. Limitaciones de los sistemas de control	173
A. Limitaciones de los sensores	174
B. Limitaciones de los actuadores	177
C. Perturbaciones no acotadas	179
D. Limitaciones por la incertidumbre en el modelo	181
E. Limitaciones estructurales: retardos temporales	184
F. Limitaciones estructurales: ceros y polos en $\overline{C}_+$	185
G. Ejemplo	190
Capítulo VII. Predictor de Smith	193
A. Análisis nominal	196
B. Análisis robusto	197
C. Ejemplo	199
Capítulo VIII. Diseño por loop shaping	205
A. Objetivos y compromisos	205
B. Planteo del problema	207
C. Procedimiento de <i>loop shaping</i>	208
D. Ejemplo	210
Capítulo IX. Diseño: parametrización de Youla	215
A. Introducción	215
B. Diseño de todos los controles estabilizantes	220
C. Aplicaciones del planteo	226
D. Ejemplo de diseño	233
Capítulo X. Aplicaciones	239
A. Páncreas artificial	239
B. Vehículo aéreo no tripulado	247
Apéndice A. Fundamentos matemáticos	263
A. Matrices	263
B. Espacios vectoriales y transformaciones lineales	270
Apéndice B. Interconexión de sistemas en variables de estado	301
A. Producto o conexión serie	302
B. Suma o conexión en paralelo	303
C. Conexión lineal fraccional (LFT)	303

Apéndice C. Transformación de sistemas de tiempo continuo a discreto	305
A. Transformación bilineal	305
B. Transformación bilineal en variables de estado	307
Apéndice D. Fundamentos de control óptimo	311
Bibliografía	317
Apéndice . Índice de términos	323

PRÓLOGO

La importancia tecnológica de los sistemas de control ha crecido de manera vertiginosa en las últimas décadas. Las razones son múltiples y diversas, en particular, los extraordinarios avances (económicos y técnicos) en sensores, actuadores, y cómputo. Esta área ha sido denominada una tecnología oculta (“hidden technology”, Åstrom), por su rol fundamental en numerosos ámbitos (e.g., industrial aeroespacial, generación y distribución de energía, robótica, etc.), que al mismo tiempo permanece relativamente invisible al público en general por su nivel de abstracción y complejidad.

Este libro presenta un tratamiento riguroso, pero al mismo tiempo informal y accesible, de los conceptos fundamentales e ideas principales de la teoría de control. Dado el carácter introductorio, la presentación está centrada en sistemas lineales, de una entrada y una salida, donde las nociones esenciales pueden ser descriptas y entendidas sin excesivas complicaciones matemáticas.

En los dos primeros capítulos los autores desarrollan el marco teórico, con énfasis en las interacciones entre modelado, simulación, análisis y diseño, y las relaciones entre las distintas representaciones de sistemas lineales (transferencia, variables de estado). El concepto fundamental de realimentación se presenta y justifica en el Cap. 3, junto con los diagramas clásicos de Nyquist y Bode. La perspectiva moderna de las ideas centrales de estabilidad, performance, y robustez, es presentada en Caps. 4-5 en términos de restricciones en las sensibilidades del lazo. Estas reaparecen en el Cap. 6, cuantificando las limitaciones fundamentales de un sistema realimentado. Las técnicas de diseño están basadas en loop-shaping y la parametrización de Youla, y combinan los aspectos “clásico” y “moderno”. Complementando los desarrollos metodológicos, varias aplicaciones de importancia práctica ilustran los distintos conceptos y herramientas técnicas. En particular, el Cap. 10 está dedicado al diseño de mecanismos de control para el tratamiento de diabetes juvenil (“páncreas artificial”) y vehículos aéreos no tripulados (“drones”), dos áreas relacionadas con recientes trabajos de investigación de los autores. Finalmente, los cuatro

apéndices proporcionan un resumen compacto de los elementos necesarios de álgebra lineal y análisis funcional, representaciones de sistemas, y control óptimo.

Es posible quizás interpretar el presente volumen como una versión (actualizada, condensada y extendida) del clásico “libro naranja” *Introducción a la teoría de control robusto* [1], que tanta influencia tuvo –en la comunidad científica en general, y en mi formación académica en particular– al ser el primer tratado sobre el área publicado en castellano. Es mi predicción y anhelo que esta obra sirva como una excelente y renovada introducción a estos tópicos para una nueva generación de lectores.

Pablo A. Parrilo, PhD
Joseph and Nancy Keithley Professor
Dept. of Electrical Engineering and
Computer Science, MIT
Boston, EEUU

PREFACIO

El objetivo de este libro es el de proveer las herramientas básicas para controlar sistemas dinámicos, teniendo en cuenta varios elementos prácticos. El planteo está basado en modelos lineales, invariantes en el tiempo (Lineal Invariante en el Tiempo (LTI))¹, de dimensión finita, Simple Entrada - Simple Salida (SISO)² y con incertidumbre, tanto en el modelo como en las perturbaciones. Estas herramientas servirán para el análisis y para el diseño de controladores con una perspectiva más general.

A pesar de lo limitado de los modelos SISO y LTI para explicar la realidad, ilustraremos a lo largo de estas páginas, cómo pueden extenderse estos resultados al control de sistemas no lineales, con retardos de tiempo o en general, de dimensión infinita. Es importante además resaltar que las herramientas que se presentan aquí se pueden aplicar al análisis y diseño de controladores para sistemas Múltiples Entradas - Múltiples Salidas (MIMO)³.

Basado en este libro, es posible el dictado de un curso para estudiantes de Física, Matemática o de distintas ramas de la Ingeniería, que tengan un manejo de ecuaciones diferenciales, transformada de Laplace y sistemas dinámicos. El texto está armado de modo de que sea útil para un curso inicial que presente los fundamentos del control automático. También es posible utilizar el libro para el dictado de dos cursos más cortos, uno básico y uno avanzado.

El curso básico reemplazaría a los cursos tradicionales de control automático y abarcaría los capítulos 1 al 5 inclusive y el capítulo 7. En este, además de las herramientas tradicionales de diseño como el PID y la realimentación de estados (capítulo 3), se agregarían elementos para el análisis robusto de sistemas (capítulos 4 y 5).

El curso avanzado podría ser dictado a alumnos que ya hayan tomado un curso básico de control. Este cubriría el capítulo 1 como introducción y los capítulos 4

¹Linear Time Invariant.

²Single-Input Single-Output.

³Multiple-Input Multiple-Output.

al 9 inclusive. Este segundo curso reemplazaría las herramientas tradicionales de diseño de controladores por los métodos de *loop shaping* y Youla (capítulos 8 y 9), que además de tratar problemas más complicados, pueden extenderse a modelos MIMO.

Los objetivos del curso completo, que incluye el básico y el avanzado, y la bibliografía de referencia se presentan a continuación.

Objetivos

Introducir al estudiante al área de control automático basado en modelos, en este caso, LTI y SISO, expresados como funciones de transferencia y en variables de estado. A las herramientas básicas de manejo de sistemas dinámicos y de teoría de control tradicional, se agregarán resultados más generales que sirven para entender las dificultades que se encuentran en muchas aplicaciones prácticas. Se enfocará sobre temas fundamentales que permiten entender en profundidad un sistema de control: las limitaciones de la realimentación, la incertidumbre en los modelos, la robustez de los diseños. Se presentarán técnicas sistemáticas de diseño como la parametrización de Youla y el *Loop shaping*⁴, que permiten resolver problemas más complejos (y prácticos) que los encontrados en textos tradicionales. Todas las técnicas de este curso se darán para modelos SISO, pero podrán ser extendidas a modelos MIMO. Asimismo, se prestará atención también a los aspectos numérico-computacionales para resolver las condiciones de análisis y diseño de controles, siendo la computadora una herramienta fundamental. De este modo el estudiante interesado en especializarse en el área de control recibirá un material útil para tratar con sistemas más complejos y realistas. En particular, el Capítulo 10 presenta dos ejemplos prácticos totalmente desarrollados mediante las técnicas presentadas en el libro. Este curso será un paso previo fundamental para cursos de control más avanzados (no lineal, robusto, conmutado) y/o para estudiantes interesados en temas de investigación en esta área. Finalmente, cuenta con un grupo de apéndices que permiten profundizar las herramientas matemáticas que sustentan la teoría presentada aquí, así como extensiones naturales de esta, como es el caso del control óptimo tradicional.

La siguiente bibliografía servirá para profundizar y expandir los temas aquí tratados.

⁴A falta de una buena traducción al castellano, se deja la denominación utilizada internacionalmente.

Bibliografía

Matemática

- Naylor A. W., Sell G. R., *Linear Operator Theory in Engineering and Science*, Springer Verlag, Nueva York, 1982.
- Strang G., *Introduction to Linear Algebra*, 5th ed. Wellesley-Cambridge Press, 2016.

Sistemas de control

- Albertos P., Mareels I., *Feedback and Control for Everyone*, Springer, 2010.
- Brockett R. W., *Finite Dimensional Linear Systems*, Nueva York, Wiley, 1970.
- Chen C.T., *Linear System Theory and Design*, Holt, Rinehart and Winston, 1984.
- Dorf R. C. , Bishop R. H., *Modern Control Systems*, Pearson, 2011.
- Franklin G., Powell J., Emami-Naeini A., *Feedback Control of Dynamic Systems*, Reading MA, Addison Wesley, 1986.
- Kailath T., *Linear Systems*, Prentice-Hall, 1980.
- Kwakernaak H., Sivan R., *Linear Optimal Control Systems*, Wiley-Interscience, 1972.
- Serón M. M., Braslavsky J. H., Goodwin G. C., *Fundamental limitations in filtering and control*, Springer Science & Business Media, 2012.
- Vidyasagar M., *Control System Synthesis: A factorization Approach*, M.I.T. Press, 1985.
- Zadeh L., Desoer C., *Linear System Theory: The State Space approach*, McGraw Hill, Nueva York, 1963.

Control robusto

- Doyle J. C., Francis B., Tanenbaum A., *Feedback Control Theory*, MacMillan, 1992.
- Dullerud G., Paganini F., *A course in Robust Control Theory*, Springer, 2000.
- Morari M., Zafrou E., *Robust Process Control*, Prentice Hall, 1989.
- Sánchez-Peña R. S., *Introducción a la Teoría de Control Robusto*, Edit. Control (AA-DECA), 1999.
- Sánchez-Peña R. S., Szaier M., *Robust System Theory and Applications*, Wiley & Sons, 1998.
- Zhou K., Doyle J. C., Glover K., *Robust Optimal Control*, Prentice-Hall, 1996.
- Skogestad S., Postlethwaite I., *Multivariable feedback control: analysis and design*, Vol. 2, Wiley Nueva York, 2007.

Los autores agradecen a la Ing. Dora Racca por la lectura de todo el contenido y sus comentarios, que fueron útiles para su mejor comprensión, así como por su colaboración con la escritura del software para la resolución de algunos problemas planteados a lo largo de este libro. También agradecemos la generosa colaboración de la Dra. Marimar Serón y del Dr. Claudio Pose, que tuvieron la amabilidad de revisar exhaustivamente los ejemplos de aplicación del Capítulo 10 e hicieron importantes aportes para su desarrollo. Le agradecemos también al Dr. Gustavo Corach por sus sugerencias y aportes, así como a los Dres. Alejandro Ghersin, Ignacio Mas, Patricio Moreno y Ezequiel Pecker Marcosig porque las discusiones con ellos permitieron mejorar el material. A los alumnos del curso, Ings. Nicolás Magliola, Sebastián Martínez y Pablo Bernadí agradecemos sus detalladas correcciones al texto. Asimismo agradecemos a los Dres. Demián García-Violini y Julio Braslavsky que compartieron con nosotros sus apuntes de clase en los cuales nos inspiramos para redactar algunas partes de este libro y al Prof. Pablo Parrilo, no solo por la minuciosa revisión del libro sino además por la redacción del prólogo.

Finalmente, ambos autores agradecen a sus respectivas familias por las horas robadas durante la elaboración de este libro y por su apoyo permanente.

Juan y Ricardo
Buenos Aires, Argentina

SIGLAS Y NOTACIÓN

A continuación se detalla una lista de las siglas y la notación utilizada a lo largo del texto.

Siglas

E/S Entrada/Salida

ER Estabilidad robusta

HiL Hardware-in-the-loop

LFT Transformación Lineal Fraccional

LQR Regulador Lineal Cuadrático

LTi Lineal Invariante en el Tiempo

mcd Máximo común divisor

MIMO Múltiples Entradas - Múltiples Salidas

ODE Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

PDE Ecuaciones en Derivadas Parciales

PID Proporcional Integral Derivativo

PN Performance nominal

PR Performance robusta

SISO Simple Entrada - Simple Salida

SVD Descomposición en valores singulares

Notación

- $F_u(a, b)$: Transformación Lineal Fraccional (LFT) superior entre a y b
- $F_\ell(a, b)$: LFT inferior entre a y b
- Se utilizarán minúsculas para representar los modelos SISO, e.g. $g(s)$, salvo el caso de las sensibilidades del modelo realimentado, $T(s)$ y $S(s)$ (introducidas en el Capítulo IV).
- Modelos representados como funciones de transferencia o variables de estado:

$$\begin{aligned}
 g(s) &= C(sI - A)^{-1}B + D \equiv \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right] \\
 &\equiv \begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}
 \end{aligned}$$

- $\mathbb{R}_+$: Números reales estrictamente positivos.
- $\mathbb{C}_- (\overline{\mathbb{C}}_-)$: semiplano izquierdo abierto (cerrado) del plano complejo $\mathbb{C}$
- $\mathbb{C}_+ (\overline{\mathbb{C}}_+)$: semiplano derecho abierto (cerrado) del plano complejo $\mathbb{C}$
- $\mathcal{L}_1$: espacio de funciones integrables (sistemas Entrada/Salida (E/S) estables)
- $\mathcal{L}_2$: espacio de funciones de energía finita
- $\mathcal{L}_\infty$: espacio de funciones de magnitud acotada
- $\delta(t)$: Impulso unitario (delta de Dirac)
- $\mathbf{1}(t)$: Escalón unitario (función de Heaviside)

CAPÍTULO I

PLANTEO CONCEPTUAL

En este capítulo se dará un planteo general del problema de control desde un punto de vista conceptual y se ilustrarán las distintas etapas de resolución de un problema a través de un ejemplo. Asimismo se enfocará desde una perspectiva histórica, los avances y temáticas que estarán presentes en este libro.

A. Fases del problema de control

Existen diferentes etapas en la resolución de un problema de control automático, es decir, de un sistema que controle ciertas variables de un determinado proceso dinámico para cumplir un objetivo. De todas ellas, se pueden distinguir tres fases claramente diferenciadas: teoría, simulación y experimentación. A su vez, cada una de estas fases está relacionada con el problema de diseño, análisis e implementación, respectivamente (ver figura I.1). Cada etapa se enfoca a la resolución de un aspecto particular del problema y en consecuencia las técnicas serán diferentes, aunque igualmente importantes. Para detallar mejor este planteo abstracto inicial, describiremos brevemente a qué nos referimos.

1. Experimento

La fase **experimental** trata directamente con el proceso dinámico (físico, biológico, económico...) a controlar. Las disciplinas involucradas dependerán del tipo de sistema (Ingeniería, Biología, Medicina, Economía...) y de su mecanismo de funcionamiento. Esta fase del control es fundamentalmente tecnológica y puede involucrar diversas áreas de la Ingeniería: química, electrónica, mecánica, aeronáutica,

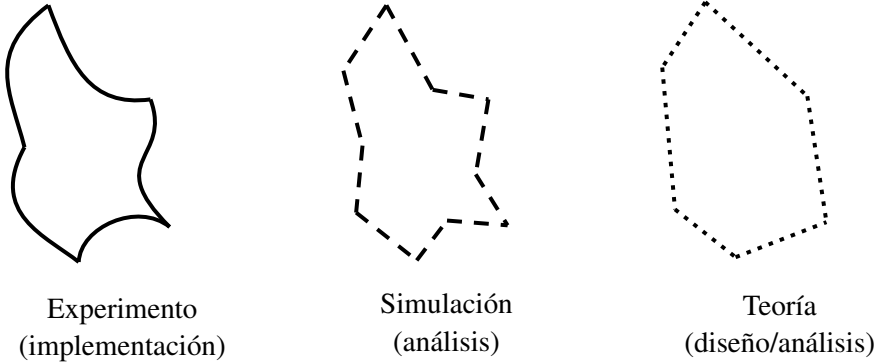


Figura I.1: Las tres fases del problema general de control.

y de las otras disciplinas. Asimismo, en la implementación y aplicación del controlador sobre el sistema dinámico, también es importante la Informática, dado que usualmente se ejecuta en un microprocesador, computadora o elemento similar.

La interacción con el sistema dinámico a controlar se realiza a través de señales físicas dentro de un esquema realimentado. Las entradas al experimento se aplican por medio de los *actuadores*, que modifican el comportamiento del proceso o sistema físico. Asimismo, es esencial registrar las señales que indican el comportamiento del sistema, medidas a través de los *sensores*, las salidas del experimento. Finalmente, un tema central es crear un modelo matemático del sistema a controlar, de modo de poder trabajar con él y no directamente con el sistema físico, al menos antes de la implementación. A lo largo de este libro, distinguiremos claramente los términos *modelo* y *sistema* (o *planta*) como dos entes diferentes, aunque relacionados entre sí. Esta es la diferencia entre la imagen de la izquierda (*sistema*) de la figura I.1 y la de más a la derecha (*modelo*), que es una caricatura de esta última.

Es fundamental entender que ninguna de estas magnitudes se conocen con precisión, ya que las acciones tanto de medir como de accionar sobre un sistema físico involucran errores y desconocimiento, a los que se llama *ruido*. Asimismo, existen procesos externos que afectan al sistema, sus sensores y actuadores, a los que se denomina genéricamente *perturbaciones*. Además, el modelo matemático, sea por desconocimiento de los conceptos físicos involucrados, por la complejidad del sistema o por la falta de información sobre los mecanismos que intervienen, tiene una importante cantidad de *incertidumbre*. El ruido, las perturbaciones y la incertidumbre del modelo jugarán un papel central en la teoría del control, y en particular en el desarrollo de este libro.

Veamos estos conceptos en el caso de un avión. Un ejemplo de *ruido* es la imprecisión con que se mide la inclinación de un avión mediante un giróscopo (sensor) o el *error* que se comete al accionar un alerón (actuador) para inclinarlo de forma aerodi-

námica. A su vez, los vientos laterales sobre el avión son ejemplos de *perturbaciones* y su modelo matemático adolece de *incertidumbre* debido fundamentalmente a los efectos aerodinámicos y dinámicos que no pueden calcularse de forma exacta.

Para trabajar de forma *rigurosa* en el problema, no se debe recurrir al método de “prueba y error” para el diseño del control, por diversas razones. En la mayoría de los casos puede llegar a ser sumamente engorroso y en muchas situaciones resulta peligroso o costoso actuar directamente sobre el experimento sin saber de antemano cuál será su respuesta, e.g. aeronaves, centrales nucleares, plantas químicas. El enfoque más eficiente y seguro consiste en *modelar* (matemáticamente) y/o *acotar* tanto el proceso dinámico como las perturbaciones, errores, ruidos y la incertidumbre. Esto nos lleva a la segunda fase del problema.

2. Simulación

La fase de **simulación** consiste en obtener un *modelo* matemático del proceso físico representable en computadora. En esta representación computacional es necesario asumir ciertas hipótesis que simplifiquen el problema y definir las variables de entrada y salida del sistema que serán representadas. La ventaja evidente es que los ensayos y el análisis ya no se realizan sobre el experimento, sino sobre su simplificación computacional o *simulación*. Esto permite probar diferentes situaciones, incluso fallas de diversa índole, sin consecuencias de costos (o de vidas).

También existe la posibilidad de combinar una representación computacional con elementos físicos del sistema en cuestión, a lo que se denomina Hardware-in-the-loop (HiL) o en general el reciente concepto de *digital twin*. La idea general es tener la representación más fiel posible, que no involucre los elementos peligrosos, costosos o en muchos casos imposibles de probar de forma directa. Un ejemplo de un simulador HiL es el *modelo de ingeniería* de un satélite, que está formado por los componentes mecánicos, electrónicos y térmicos del satélite, conectados a un modelo matemático de la órbita y los campos gravitacional y magnético de la Tierra, simulados en una computadora.

El modelo computacional se obtiene de un modelo matemático general que a su vez surge de las leyes físicas que gobiernan el proceso, o de un procedimiento de identificación de modelos [2, 3, 4] que puede estar seguido de un proceso de validación¹ [6]. Es importante resaltar que el modelo computacional, al no ser el sistema

¹En realidad el término correcto debería ser *(in)validación*, ya que desde una perspectiva epistemológica [5], una teoría científica (o un modelo) puede no haber sido invalidada, pero no puede asegurarse que sea válida. Esto último implicaría que la teoría (o el modelo) tendría la capacidad de producir todos los datos experimentales pasados, presentes y futuros. Lo único que puede asegurarse con certeza es cuando se detecta que la teoría (o el modelo) es inválido.

real, representa una aproximación conveniente con la cual trabajar que trata de tener la mayor precisión posible, dentro de los límites de la complejidad del sistema físico. Por supuesto, las conclusiones que se saquen dependen del rango de validez de dicho modelo. Las disciplinas involucradas estarán relacionadas con la dinámica del sistema real, lo cual puede involucrar especialidades como la Física, Química, Biología, Medicina, Economía, etc. Sin embargo hay un común denominador, cualquiera sea la dinámica a tratar, que involucra las áreas de modelización, identificación y validación de sistemas dinámicos y también de optimización. Asimismo, es fundamental en cada caso el análisis de los problemas numéricos y el desarrollo de un software eficiente que permita ejecutar la simulación en tiempo real, en el caso que esta sea necesaria.

En esta etapa se busca obtener la mejor aproximación al sistema físico dentro de su rango de utilización, es decir, solo para las señales involucradas y dentro de los márgenes del sistema real. En particular, deben definirse las entradas y salidas del sistema a tratar y de esa manera especificar qué parte de su dinámica estará representada en la simulación. Como ejemplo, el modelo computacional del eje longitudinal de un avión puede ser excelente para describir el comportamiento de dicho eje en el sistema real, pero no podrá ser usado para analizar los gradientes térmicos en el timón de profundidad debidos a ráfagas de viento. Las limitaciones por la complejidad del modelo matemático que a su vez dará origen al modelo computacional, están en la velocidad y la precisión del cómputo.

Tanto en las simulaciones fuera de línea (*off-line*) y especialmente en las de tiempo real (*on-line*), el costo computacional estará dado por el tiempo de simulación. Esto determina un compromiso entre la complejidad del modelo computacional y el tiempo de cómputo. Además, la utilización de modelos matemáticos muy complejos limita las herramientas de diseño o de análisis de controladores.

De lo anterior se desprende que para poder obtener un procedimiento de diseño de un controlador a partir de un modelo matemático, se impone una nueva simplificación (ver figura I.1). Esta se hará a costa de nuevas hipótesis, de las cuales se obtendrá un modelo más sencillo que podrá ser evaluado con las herramientas matemáticas existentes y a partir del cual se podrá diseñar y *computar* un controlador que satisfaga las especificaciones de diseño. Estos modelos se denominan modelos *orientados al control* (*control-oriented*²) y esto nos lleva a la tercera fase del problema.

²A lo largo de este libro usaremos en muchas ocasiones siglas que provienen del inglés, dado su uso generalizado en esta área del conocimiento.

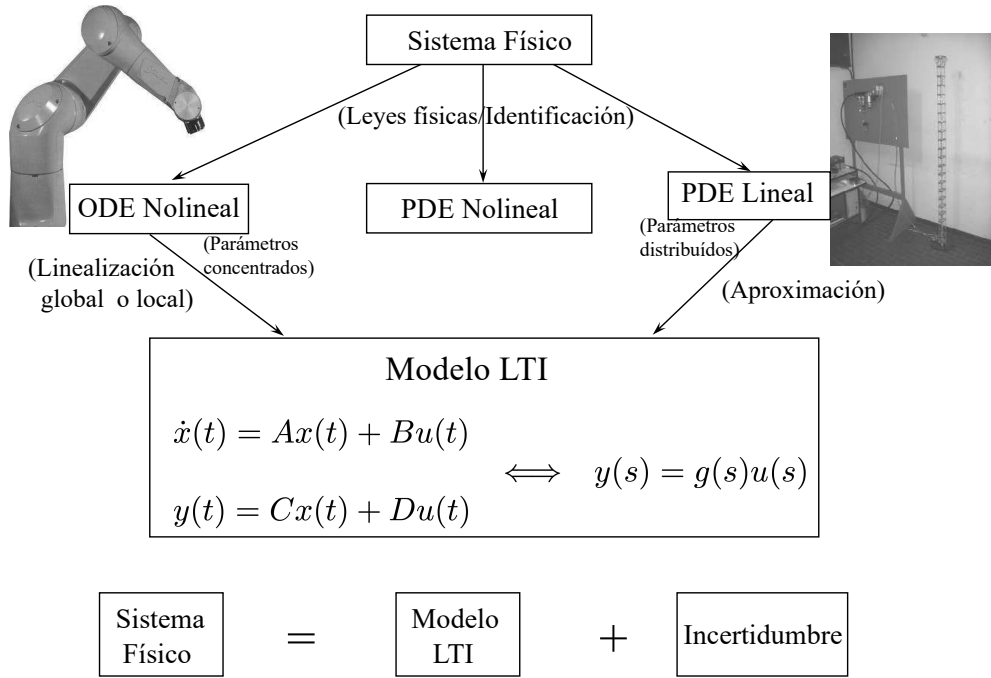


Figura I.2: Obtención de modelos LTI en problemas prácticos.

3. Teoría

En esta fase del problema se busca simplificar suficientemente el modelo del sistema físico para poder utilizar herramientas matemáticas que permitan diseñar y analizar un controlador para él. Con este fin, se parte del modelo dinámico utilizado en la simulación y se lo simplifica hasta llegar a un conjunto finito de ecuaciones diferenciales lineales y de coeficientes constantes, denominados usualmente LTI. Esto se debe a que los resultados más usuales de la teoría de control y que poseen herramientas de cálculo bien establecidas, tratan con este tipo de modelos simplificados.

Por supuesto, la naturaleza no es sencilla de representar matemáticamente y un modelo completo y preciso resulta en general bastante complicado. Hay diversas técnicas para obtener modelos matemáticos, como los que se usan en simulación, a partir de sistemas dinámicos. La primera es a partir de las ecuaciones de la física que describen su dinámica, como es el caso de las ecuaciones de Newton-Euler, que explican muchas aplicaciones interesantes, e.g. estructuras mecánicas, aviones, satélites, robots. La segunda es por medio de la metodología de *identificación* e

(*in*)validación de sistemas, como es el caso de procesos químicos o biológicos que por su complejidad resultan difíciles de modelar por leyes conocidas. A lo largo del libro mencionaremos nuevamente ambos procedimientos, pero su explicación detallada excede el contenido de este texto.

Estos modelos obtenidos, sea por las leyes de la física o por identificación, generalmente son Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (ODE) no lineales o Ecuaciones en Derivadas Parciales (PDE), estas últimas también denominadas de dimensión infinita. Existen métodos para linealizar las ecuaciones no lineales (ver capítulo II) o para aproximar las PDE por ecuaciones de dimensión finita. No entraremos en estos detalles, pero el proceso puede ejemplificarse en el gráfico de la figura I.2.

Claramente al aplicar los procedimientos de linealización o de aproximación se introducen simplificaciones que no contemplan algunos comportamientos del sistema. Esta dinámica *residual* que se deja de lado se denomina *incertidumbre del modelo* y forma parte fundamental del desarrollo de la teoría de control a partir de la década del 80. El tratamiento que se hará aquí de los modelos para diseño de controladores tiene en cuenta este comportamiento desconocido que queda separado del modelo *nominal* (LTI) y lo agrega como incertidumbre (ver diagrama en bloque al final de la figura I.2).

4. Ejemplo

Las tres etapas descriptas no son independientes entre sí, sino que están estrechamente relacionadas (ver figura I.1). Ninguna de ellas es menos importante que la otra y la solución del problema de control, desde su fase abstracta teórica, hasta la concreción e implementación del controlador que efectivamente regule el proceso, depende de estas tres etapas. Asimismo, cada fase tiene sus limitaciones y conveniencias.

Por ejemplo, en la etapa experimental se trabaja directamente sobre el sistema real, pero no es posible elaborar ninguna estrategia de control adecuada o análisis general a partir solamente de las señales de entrada y salida, como indicamos antes. De forma similar, a pesar de la conveniencia de contar con un modelo computacional para simular, este solo sirve como primera verificación de que el proceso funciona una vez diseñada la estrategia de control, pero la prueba experimental final es inevitable. Finalmente la etapa teórica puede producir condiciones fuertes (necesarias y suficientes) de análisis que sirven para el diseño adecuado del controlador, pero están basadas en hipótesis simplificadas que quizá no se cumplan. Por lo tanto, el controlador deberá ser verificado en la simulación y experimentalmente para estar seguros de los resultados.

Un ejemplo típico de estas tres fases se da en el diseño de controles para aero-

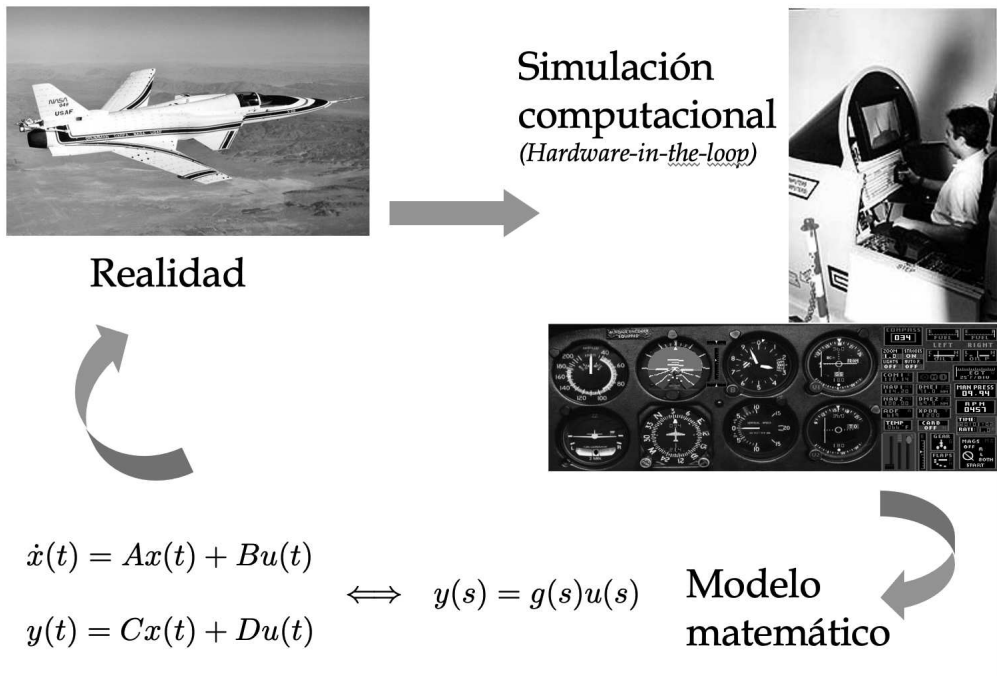


Figura I.3: Ejemplo de las tres fases del problema de control para el caso de un avión experimental.

naves, como se indica en la figura I.3. Partiendo de las ecuaciones de la mecánica clásica, se desarrolla el conjunto de ecuaciones no lineales que describen la orientación de la aeronave, tomando algunas hipótesis simplificadoras, como las de cuerpo rígido y simetría del sistema [7, 8], entre otras. Esta será la estructura matemática que se utilizará como modelo computacional en la simulación. Seguidamente se procederá a realizar la identificación de parámetros de este modelo frente a datos reales del avión. Nuevamente se utilizan otro grupo de datos experimentales para (in)validar el modelo y sus parámetros de modo que el ajuste con el experimento tenga el menor error posible. Este modelo será el simulador que servirá para las pruebas preliminares.

A continuación este modelo será linealizado en una grilla de condiciones de vuelo (altura de vuelo, velocidad, ángulo de ataque), denominados *puntos de trabajo*. Para cada uno se calcula un modelo LTI y se diseña un controlador LTI, que será eficaz en el entorno de ese punto de trabajo. Durante el vuelo, se conmuta de un controlador al siguiente de acuerdo al valor instantáneo de la condición de vuelo, que será medido en tiempo real por los instrumentos del avión (altímetro, GPS, sistema de navegación). Esta técnica se denomina *planificación de ganancias* (*gain-scheduling*) y es la más usada en sistemas aeronáuticos. Esta es la etapa denominada teórica.

Una vez diseñado el conjunto de controladores en la etapa teórica (más a la derecha en la Fig. I.1), se pasa a la siguiente fase. Allí se verifica que la estabilidad y la performance (o desempeño) sobre la simulación computacional de cada uno de los controles sea la adecuada. Es muy importante sobretodo la garantía de estabilidad durante el pasaje de una condición de vuelo a la siguiente. Una vez verificado exhaustivamente este paso, se implementan los controles y sus mecanismos de conmutación entre puntos de trabajo en la computadora de vuelo del avión para realizar el ensayo de vuelo final con un piloto de pruebas. El piloto indica las posibles falencias del controlador en las distintas condiciones de vuelo, e.g. respuesta demasiado lenta o excesivamente abrupta, vibraciones, etc. Esto implica la posibilidad de volver a las etapas anteriores, corregir y nuevamente recorrer las mismas etapas. En algunos casos puede implicar mejorar alguno de los modelos lineales o incluso introducir dinámicas no contempladas inicialmente, como por ejemplo fenómenos de vibración, anisoeelasticidad o asimetrías en el modelo (ver [9, 10, 11]).

B. Pongamos todo esto en perspectiva

La ingeniería de control ha tenido un enorme impacto en nuestra sociedad. Como muestra podemos citar las palabras de Wilbur Wright (1901):

Nº de entradas/salidas	SISO	MIMO
Dependencia c/variables	Lineal	No lineal
Dependencia c/tiempo	Estacionario	No estacionario
Variable tiempo	Continuo	Discreto
Estructura	Entrada-Salida	Espacio de estados
Parámetros	Concentrados (ODE)	Distribuidos (PDE)
Descripción del sistema	Modelo nominal	Familia de modelos

Tabla I.1: El “bosque” completo de sistemas dinámicos y modelos matemáticos.

- *Sabemos cómo construir aeroplanos y motores.*
- *No saber cómo equilibrar y maniobrar es lo que desafía a los estudiosos del problema de vuelo.*
- *Cuando esta única **dificultad** sea resuelta, la era del vuelo habrá arribado, ya que las demás dificultades son de menor importancia.*

Los hermanos Wright resolvieron cómo equilibrar y maniobrar el Flyer I y lo volaron el 17 de diciembre de 1903. Esta **dificultad** finalmente fue estructurada en lo que hoy se conoce como **teoría del control automático**, cuyos conceptos principales se encuentran en este libro. Esta tecnología ha sido llamada en ocasiones la *tecnología fantasma*, ya que está presente en diversas aplicaciones, pero oculta para el público en general.

Los comienzos del desarrollo de la teoría de control se remontan a la década del 40. Los métodos iniciales, denominados de control clásico [12, 13, 14] han sido eficaces para resolver algunos de los problemas mencionados anteriormente. Aún hoy, muchos problemas de control son analizados y resueltos siguiendo estos sencillos procedimientos. Muchas veces los diseños de controladores se hacen sin contar con un modelo matemático del sistema a controlar, como el tradicional Proporcional Integral Derivativo (PID). Otras veces se utiliza un modelo sencillo cuyas características principales son las siguientes:

- Modelo de una entrada y una salida (SISO), descrito por una ecuación diferencial lineal de parámetros constantes y usualmente de 2^{do} orden.
- El rendimiento, desempeño o performance (como usualmente se conoce) del sistema está especificada en el dominio del tiempo (tiempos de respuesta, de establecimiento y sobrepico). Por ser de 2^{do} orden, esta puede ser fácilmente “traducida” al dominio de la frecuencia (ancho de banda y sobrepico en el diagrama de Bode).

- Análisis robusto frente a incertidumbres del modelo basado en márgenes de fase y de ganancia.

Pasar con facilidad del dominio del tiempo al de la frecuencia como descripción de los modelos permite tener una mejor intuición sobre los conflictos y compromisos en el diseño de un sistema a lazo cerrado. Además, la conveniencia de trabajar en el dominio de la frecuencia ha sido uno de los legados fundamentales del control clásico a las teorías de control actuales. Las medidas de "robustez" (márgenes de fase y ganancia) se basan en simplificaciones "optimistas" de la incertidumbre en el modelado. Para el diseño de controladores se ha utilizado el lugar de raíces (*root-locus*), que no es generalizable al caso de sistemas de MIMO. Los nombres de Bode, Nyquist, Evans y Nichols entre otros están asociados a estos primeros pasos en la teoría de control [15, 16].

A pesar de que esta metodología obtuvo buenos resultados en muchas situaciones, el proceso de prueba y error y la sobresimplificación del sistema físico hace a estos procedimientos ineficaces para sistemas más complejos y con especificaciones más restrictivas. A finales de la década del 50 surge la descripción de sistemas mediante variables de estado. Básicamente estos modelos permiten tratar en forma equivalente a sistemas SISO y a MIMO [17, 18]. El rápido surgimiento de computadoras cada vez más veloces, orienta el diseño hacia métodos directos y algorítmicos en oposición a los de prueba y error utilizados anteriormente. La teoría se vuelve matemáticamente más elegante aunque también menos intuitiva. La pregunta de diseño tradicional *¿puede el sistema cumplir con las especificaciones?* se modifica y pasa a *¿qué es lo mejor que se puede lograr con este sistema?*, lo que dio lugar al concepto de optimización y a los controladores óptimos. La descripción por variables de estado y la optimización, son los legados de esta época, ya que este tipo de modelos son los que internamente opera la computadora. Los nombres de Kalman, Bucy, Pontryagin, Brockett y Luenberger figuran entre los más prominentes de este período, conocido como control moderno [18, 19, 20, 21, 22, 23].

El anterior fue un paso importante hacia una teoría que permita tratar situaciones más complejas. Sin embargo, el problema de un diseño **robusto** frente a las incertidumbres *realistas* del modelo siguió sin ser resuelto de forma cuantitativa [24, 25]. Los desarrollos en control automático en las décadas del 40 al 70 consideraban mediciones y modelos perfectamente conocidos, lo cual sabemos no ocurre en la realidad. El concepto de *robustez* frente a la incertidumbre en el modelado y las perturbaciones empezó a cobrar mayor importancia, de lo cual surgió en la década del 80 el control robusto. Aquí los nombres fundamentales que inician esta área son Doyle, Morari, Safonov y Glover, entre otros [26, 27, 28, 29, 30, 31, 32]. Este será un tema central de este libro.

Asimismo, desde mediados de los 70 comenzó a desarrollarse el enfoque alge-

braico aplicado a los sistemas de control, a partir del trabajo de Youla y colegas en 1976 [33, 34]. Este esquema no solo conecta los modelos en variables de estado con las funciones de transferencia [35], sino que además presenta una fórmula que parametriza todos los controles que estabilizan un determinado modelo LTI [33, 34, 36]. Esta metodología permite además ser utilizada en modelos SISO, MIMO, de tiempo continuo, discreto y será también tratada en este libro como herramienta de diseño.

Actualmente el campo del control automático es muy amplio y sigue muy activo no solo por el desarrollo de nuevos paradigmas sino por la expansión a sistemas cada vez más complejos. Un ejemplo ilustrativo de esto último es la Tabla I.1, que da una visión global del "bosque" de posibles sistemas y modelos matemáticos que los describen. Asimismo, ha habido un surgimiento de nuevas y novedosas aplicaciones, especialmente en las áreas de Biomedicina, Neurobiología, Nanotecnología, Tecnología vehicular, Ingeniería del software, Aeroespacio y Energía [37].

CAPÍTULO II

MODELOS DE SISTEMAS DINÁMICOS

Como se mencionó anteriormente, ya sea en la etapa de simulación o para el desarrollo teórico, resulta necesario contar con un modelo matemático de la planta que se desea controlar. Este modelo busca capturar el comportamiento dinámico del sistema. Dependerá de la necesidad del/a diseñador/a tener una descripción exhaustiva del sistema físico en contraposición con la complejidad del modelo, tanto para el estudio teórico como para la implementación computacional. Tratar de obtener un modelo matemático que perfectamente replique el sistema real es un esfuerzo en vano. Todo modelo es, entonces, una versión aproximada del proceso real¹.

A. Funciones de Transferencia

Los modelos LTI que se tratan aquí siempre pueden representarse por medio de una ecuación diferencial ordinaria ODE de la forma:

$$\frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_0 y(t) = b_m \frac{d^m u(t)}{dt^m} + \dots + b_0 u(t)$$

Las señales temporales $u(t)$ e $y(t)$ caracterizan a las entradas y salidas del modelo, respectivamente.

Considerando que el modelo parte de una situación de reposo, si se aplica la transformada de Laplace a ambos lados de la expresión, puede convertirse en una ecuación algebraica de la forma:

$$s^n y(s) + a_{n-1} s^{n-1} y(s) + \dots + a_0 y(s) = b_m s^m u(s) + \dots + b_0 u(s),$$

¹A lo largo de este libro utilizaremos para el sistema real la terminología *sistema* o *planta*, de forma equivalente. Esto procede históricamente del área de control de procesos químicos.

donde se utiliza como notación $y(s)$, $u(s)$ para representar las transformadas de Laplace de $u(t)$, $y(t)$, respectivamente, quedando diferenciadas por las variables de las cuales dependen. Esto puede expresarse como

$$\begin{aligned} y(s) &= g(s)u(s), & g(s) &= \frac{n(s)}{d(s)} \\ n(s) &= b_ms^m + \dots + b_0 \\ d(s) &= s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 \end{aligned}$$

La función $g(s)$ que relaciona la entrada con la salida, se define como **función de transferencia** del sistema.

Ciertas propiedades de gran importancia de $g(s)$ son aquellas que nos van a dar información del comportamiento del modelo. Los **ceros** del sistema son las raíces de $n(s)$, y sus **polos**, las raíces de $d(s)$. El **grado relativo** es la diferencia de los grados $n - m$ entre el numerador y denominador. Si $m \leq n$, la función de transferencia es **propia** y es **estrictamente propia** si $m < n$. Se llama función de transferencia **impropia** cuando $m > n$ y **bipropia** si $m = n$.

En muchos casos la función de transferencia $g(s)$ es una función racional, i.e. cociente de polinomios, por ejemplo cuando aparece ligada a sistemas LTI finito-dimensionales. En ciertos casos la función de transferencia puede estar definida, pero no ser racional. Este es el caso del Ejemplo II.5 para el cual la relación entre la entrada y la salida está dada por $y(t) = u(t - \tau)$, para un retardo $\tau > 0$ fijo. Tomando la transformada de Laplace en ambos miembros, y considerando $u(t) = 0$ para todo $t < 0$, se tiene:

$$\begin{aligned} y(s) &= \int_0^\infty u(t - \tau)e^{-st} dt = \int_{-\tau}^\infty u(h)e^{-s(h+\tau)} dh = e^{-\tau s} \int_0^\infty u(h)e^{-sh} dh \\ &= e^{-\tau s} u(s), \end{aligned}$$

realizando el cambio de variable $h = t - \tau$. En este caso la función de transferencia es $g(s) = e^{-\tau s}$, que no es una función racional, debido a que un retardo no es un sistema finito-dimensional (ver capítulo VII).

1. Matrices de transferencia

Si bien se supondrá que los sistemas que se tratarán en este libro tienen una entrada de control y una salida (SISO), veremos que como parte del lazo de control es importante considerar otras entradas y salidas. Por ejemplo, entradas provocadas por perturbaciones o la acción de control tomada como salida. Es por esto que resulta necesario considerar matrices de transferencias. El siguiente ejemplo permite comprender la idea y su utilidad.

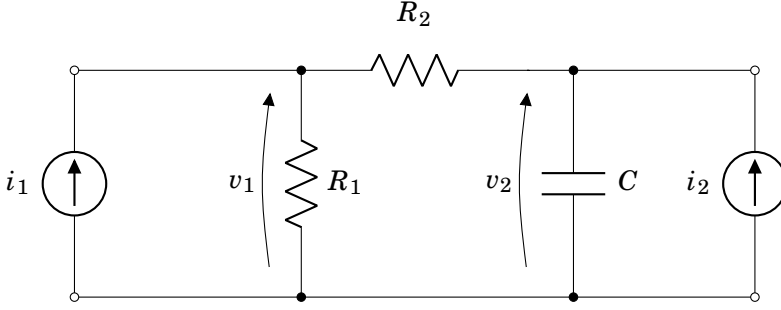


Figura II.1: Circuito con dos entradas de corriente y dos salidas de tensión.

Ejemplo II.1 Supongamos que se cuenta con el circuito de la figura II.1, que puede ser descrito por las siguientes ecuaciones:

$$i_1 = \frac{v_1}{R_1} + \frac{v_1 - v_2}{R_2} \quad (2.1)$$

$$i_2 = \frac{v_2}{sC} - \frac{v_1 - v_2}{R_2}, \quad (2.2)$$

o en formato matricial:

$$\begin{bmatrix} i_1(s) \\ i_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R_1+R_2}{R_1R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{R_2+sC}{sCR_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{R_1+R_2}{R_1R_2} & -\frac{1}{R_2} \\ -\frac{1}{R_2} & \frac{R_2+sC}{sCR_2} \end{bmatrix}^{-1}}_{Z(s)} \begin{bmatrix} i_1(s) \\ i_2(s) \end{bmatrix}.$$

La matriz de impedancia del circuito $Z(s)$ contiene en cada una de sus componentes $Z_{ij}(s)$ una función de transferencia racional, que relacionará la entrada j con la salida i .

Plantear el problema de esta forma simplifica el análisis. Supongamos por ejemplo que la salida $i = 2$ se pone en corto circuito, es decir $v_2 = 0$, entonces debe resolverse el sistema:

$$\begin{bmatrix} v_1(s) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11}(s) & Z_{12}(s) \\ Z_{21}(s) & Z_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(s) \\ i_2(s) \end{bmatrix},$$

de donde se obtiene $Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2 = 0 \Rightarrow i_2 = -Z_{22}^{-1} Z_{21} i_1$, y por lo tanto

$$v_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2 = (Z_{11} - Z_{12} Z_{22}^{-1} Z_{21}) i_1$$

La matriz $(Z_{11} - Z_{12} Z_{22}^{-1} Z_{21})$ se conoce como complemento de Schur de la matriz $Z(s)$, o también suele llamarse la matriz de cortocircuito, justamente porque permite estudiar qué sucede con uno de los puertos cuando los otros se ponen en corto circuito.