# ÁLGEBRA A

SEGUNDA EDICIÓN

Nicolás A. Capitelli
Rosa María Escayola
Ximena L. Fernández
Gerardo D. Rossi

EUDEBA

UBA XXI

# ÁLGEBRA A

EUDEBA

# Universidad de Buenos Aires

**Coordinación de Desarrollo Pedagógico**
María Alejandra Codazzi
Camila Rodríguez
Marianela Renzi

**Coordinación de Producción Transmedia**
Liliana Castillo
Griselda Raffo
Ariel F. Guglielmo

**Lectura crítica de la segunda edición**
Cecilia Pineda

Álgebra A / Rosa María Escayola ... [et al.]. - 2a ed - Ciudad Autónoma de Buenos Aires : Eudeba, 2024.
Libro digital, PDF - (UBA XXI)

Archivo Digital: online
ISBN 978-950-23-3447-9

1. Álgebra. I. Escayola, Rosa María.
CDD 512.1

Eudeba
Universidad de Buenos Aires

Primera edición: marzo de 2024

*A mi mujer Melina y mis hijos Agustín y Santiago,*
*con la promesa que nunca estaré en el lado equivocado otra vez.*

*Nicolás*

*A Ale y Tiara, por animarme a volar y cumplir mis sueños.*
*A Analía por alentarme a asumir este proyecto.*

*Rosa María*

*A todas las personas que me crucé y me sigo cruzando*
*en este camino de aprender y enseñar matemáticas.*

*Ximena*

*A Pasio por su ayuda con el lenguaje.*
*A mis viejos y hermanos por todo lo demás.*

*Gerardo*

*Agradecemos especialmente la lectura crítica de Cecilia Pineda.*

## Introducción

Este libro es, probablemente, muy diferente a otros libros o apuntes de matemática que hayan leído: aquí encontrarán explicaciones de conceptos y ejemplos básicos incluidos para ayudarlos a entender las ideas detrás de las definiciones y los objetos que estudiaremos. Muchos textos de matemática presentan las teorías desde un punto de vista formal y abstracto ("la teoría es esta y así funciona") en lugar de explicar su origen, implicaciones y aplicaciones, para clarificar los conceptos que conforman las teorías, de manera tal que resulte natural el reconocimiento de su existencia. Asimismo, mucha de la teoría contenida en este libro tiene orígenes (y aplicaciones) geométricas, y se ha hecho énfasis en resaltar estos hechos, dejando en un segundo plano "lo abstracto" de la teoría para dar lugar a un enfoque más visual e intuitivo.

El texto está separado en dos partes. En la primera, se desarrollan aspectos más geométricos, aunque no exentos de álgebra, mientras que en la segunda los aspectos son netamente algebraicos, lo cual no impide que se relacionen con los de la primera parte. Al final de la segunda parte, encontrarán las resoluciones de los experimentos.

Para los estudiantes que no estén familiarizados con el formato de los libros de matemática, se sugiere que realicen el curso virtual, gratuito y autogestionado "Lenguaje Matemático" a través de Enlace UBA (enlace.uba.ar).

La siguiente lista muestra los distintos tipos de categorías que contiene el apunte:

1. Definiciones, teoremas y proposiciones.
2. Ejemplos.
3. Observaciones.
4. Experimentos.
5. Para pensar (representado por una lamparita).
6. Información complementaria (representada por una letra "i").

Teniendo en cuenta estas disposiciones, el estudiante debe tener presente el siguiente orden de prioridades.

1. PRIORIDAD 1.
   - Definiciones, teoremas, proposiciones.
   - Ejemplos.
2. PRIORIDAD 2.
   - Observaciones.
   - Experimentos.
   - Texto en *cursiva*.
3. PRIORIDAD 3.
   - Para pensar.
   - Información complementaria.

Sugerimos que, en una primera lectura, el libro sea leído en su totalidad. El estudiante que desee, en lecturas posteriores, utilizar el texto, puede optar por leer solo las categorías de PRIORIDAD 1 o de PRORIDAD 1 y 2, según el grado de produndidad que desee encarar.

En la próxima página encontrarán ejemplos de los distintos formatos y categorías del texto.

## Página ejemplo

El texto sin formato (estándar) es de lectura obligatoria. En él se introducen objetos, se explican conceptos y se resuelven problemas concretos necesarios para el desarrollo de la teoría.

**Definición 1** Las definiciones, proposiciones y teoremas aparecen con una barra vertical naranja gruesa sobre el margen izquierdo que señala que se trata de información esencial para comprender la teoría.

**Teorema 1** Los teoremas, proposiciones y lemas aparecen con la barra vertical gruesa también.

■ **Ejemplo 1** Los ejemplos aparecen en letra más pequeña y centrados en la página. Esto ayudará a indentificarlos rápidamente dentro del texto. En general, muestran cómo llevar a cabo cálculos introducidos en la teoría y de qué manera escribir la solución de los ejercicios. ■

**Observación 2** *Las observaciones aparecen con una barra vertical naranja finita sobre el margen izquierdo. Esta categoría contiene información y notas importantes que complementan la teoría.*

**Experimento 1** Los experimentos son "ejercicios guiados" que se dejan para que el estudiante resuelva. Esta es la mejor manera de aprender los conceptos introducidos. Muchas veces, cuando se considera que el estudiante tiene las herramientas para entender una definición o una cuenta por su lado, se lo deja planteado para que lo descubra por su cuenta dentro de un experimento. Las resoluciones de los experimentos se encuentran al final del libro. ■

*La sección "Para pensar..." tiene por objetivo dejarle al estudiante una pregunta relacionada con la teoría que acaba de aprender. Le será altamente beneficioso tomarse un tiempo para pensar estas preguntas ya que le ayudará a comprender con mayor profundidad muchos de los conceptos desarrollados.*

*La sección "Información complementaria" tiene por objetivo complementar algunos de los conceptos introducidos para una formación más integral del estudiante.*

# Contenidos

## I Parte 1

# II Parte 2

# Parte 1

# 1. Vectores

*Los* vectores *constituyen el principal objeto de estudio de la mayor parte del contenido de este libro. Son objetos sencillos que tienen interpretaciones muy concretas, tanto geométricas como algebraicas. En este capítulo, vamos a definirlos y estudiar sus propiedades principales.*

## 1.1 Conjuntos

Comenzaremos analizando algunas nociones básicas de la teoría de conjuntos que atraviesan el desarrollo de este libro. Es importante tenerlas presentes e interiorizarlas.

**En este apartado explicaremos**

- Cómo describir conjuntos: por extensión o por comprensión.
- Los conjuntos $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^n$.
- Las operaciones básicas de conjuntos: unión, intersección, diferencia y complemento.

### 1.1.1 ¿Qué es un conjunto?

Gran parte de la Matemática que conocemos se cimenta alrededor de la noción de *conjunto*. Un *conjunto* es una colección de *objetos* o *elementos*. Estos objetos o elementos pueden ser: concretos (como los útiles en nuestra cartuchera o las hojas de un árbol) o abstractos (como los números que usamos para contar o los puntos en un plano). Un conjunto puede tener cualquier tipo de elementos, concretos o abstractos, y cualquier cantidad de ellos, ya sea finita o infinita.

Habitualmente se utilizan letras mayúsculas ($A$, $B$, $C$) para representar conjuntos y letras minúsculas para representar los objetos o elementos pertenecientes a estos conjuntos. Cuando un elemento $x$ pertenece a un conjunto $A$ escribimos:

$$x \in A$$

Por ejemplo, si $X$ es el conjunto cuyos elementos son el número $1$, el símbolo @, una manzana y una naranja entonces podemos escribir $1 \in X$. También, $@ \in X$. Si un elemento no pertenece al conjunto usamos $\notin$. Por ejemplo, $2 \notin X$ y $\sharp \notin X$.

**Importante** *Un conjunto queda determinado de manera única por sus elementos, de forma que dos conjuntos que tengan los mismos elementos son idénticos. Si $A$ y $B$ son conjuntos con los mismos elementos escribiremos $A = B$.* ■

Muchas veces nos interesará trabajar con algunos de los elementos de un conjunto dado. Por ejemplo, podríamos considerar el "conjunto de las frutas que están en $X$". Es decir, al conjunto formado por la manzana y la naranja. Este es un conjunto $Y$ que está *contenido* o *incluido* en $X$, ya que los elementos de $Y$ son, en particular, elementos de $X$. En este caso decimos que "$Y$ es un *subconjunto* de $X$" y lo escribimos:

$$Y \subseteq X$$

Lo que implica la notación $Y \subseteq X$ es que todo elemento de $Y$ es un elemento de $X$. De igual manera que antes, utilizamos el símbolo tachado $\nsubseteq$ para indicar que un conjunto no está contenido en el otro. Por ejemplo, si $Z$ es el conjunto de elementos 1, @ y $\sharp$, entonces $Z \nsubseteq X$ ya que $\sharp \notin X$. Observemos que, para que $B \nsubseteq A$, alcanza con que al menos un elemento de $B$ no pertenezca a $A$.

**Observación 1** *La noción de inclusión brinda una manera de determinar cuándo dos conjuntos son idénticos: $A = B$ si simultáneamente vale que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. En efecto, si $A = B$ entonces es cierto que los elementos de $A$ están en $B$ y viceversa, por lo que es cierto que $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$. Por otro lado, si $A \subseteq B$ entonces todos los elementos de $A$ también están en $B$; y si $B \subseteq A$ entonces todos los elementos de $B$ también están en $A$. Concluimos que tienen los mismos elementos y, por ende, son iguales.*

El conjunto que no posee ningún elementos se llama *conjunto vacío* y se nota $\emptyset$.

### 1.1.2 ¿Cómo describir un conjunto?

Existen dos maneras clásicas en las que es posible especificar el contenido de un conjunto; se las denomina *descripción por extensión* y *descripción por comprensión*.
Si el conjunto tiene pocos elementos, se puede escribir la lista entre llaves "{ }". Por ejemplo,

$$X = \{1, @, \text{manzana}, \text{naranja}\} \qquad\qquad Y = \{\text{manzana}, \text{naranja}\}.$$

Esta manera de describir un conjunto se llama *por extensión*. Cuando describimos un conjunto de esta manera, no importa el orden en el que se presentan los objetos. Es decir, los conjuntos $\{1, @, \text{manzana}, \text{naranja}\}$ y $\{\text{naranja}, 1, \text{manzana}, @\}$ representan el mismo conjunto (en este caso, $X$).
Muchas veces es imposible listar todos los elementos del conjunto o es muy tedioso hacerlo. En este caso, se apela a una propiedad que compartan los elementos del conjunto para describirlo. Por ejemplo, cuando definimos anteriormente el conjunto $Y$ dijimos que $Y$ era "el conjunto de las frutas en $X$". De esta manera, el conjunto $Y$ quedó determinado por la premisa que entendemos qué es una fruta (o, por lo menos, sabemos distinguir una fruta de algo que no lo es). Esta manera de describir los conjuntos se llama *por comprensión* y su expresión simbólica es:

$$Y = \{x \in X \ : \ x \text{ es una fruta}\}$$

Aquí las llaves significan "el conjunto de" y los dos puntos ":" sustituyen las palabras "tales que". La definición anterior se lee "$Y$ es el conjunto de los $x$ pertenecientes a $X$ tales que $x$ es una fruta". Notemos que al principio de la descripción se especifica de dónde se están tomando los elementos (en este caso en $X$) y, luego, cuál es su propiedad definitoria (en este caso “ser una fruta”). Es habitual que, cuando describimos un conjunto por comprensión, utilicemos un conjunto referencial de donde elegimos los elementos. Por ejemplo, el conjunto de los números reales positivos menores que 10 lo escribimos de la siguiente manera:

$$W = \{x \in \mathbb{R} \,:\, 0 < x \leq 10\}$$

Aquí el conjunto referencial es $\mathbb{R}$. En general, se especifica (o deja en claro) el “universo” en donde se “va a trabajar” y se llama *conjunto universal*.

**Observación 2** *En Matemática generalmente se trabaja con conjuntos de números que ya tienen nombres asignados:*

- $\mathbb{N}$*, los números naturales;*
- $\mathbb{Z}$*, los números enteros;*
- $\mathbb{Q}$*, los números racionales;*
- $\mathbb{R}$*, los números reales;*
- $\mathbb{C}$*, los números complejos.*

■ **Ejemplos 1** Consideren los siguientes conjuntos.

1. $A = \{x \in \mathbb{N} \,:\, x \text{ es múltiplo de 2 y } x \leq 10\}$;
2. $B = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 = 1\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x^2 = -1\}$

Pueden escribir por extensión estos conjuntos. El conjunto $A$ es exactamente el conjunto $\{2, 4, 6, 8, 10\}$; el conjunto $B$ es $\{1, -1\}$. Por otro lado, el conjunto $C$ no tiene elementos ya que ningún número real elevado al cuadrado puede dar como resultado un número negativo. Es decir, $C = \emptyset$. ■

### 1.1.3 Subconjuntos del plano y el espacio

En este libro vamos a trabajar principalmente con subconjuntos del plano y del espacio. Lo que se conoce como *plano* es el conjunto de los *pares ordenados* de números reales $(x, y)$ y se nota $\mathbb{R}^2$. Formalmente, se escribe:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \,:\, x, y \in \mathbb{R}\}$$

El adjetivo “ordenados” quiere decir que en la expresión “$(x, y)$” importa el orden de los números $x$ e $y$ (y, por lo tanto, $(x, y)$ e $(y, x)$ son objetos diferentes). El nombre “plano” que se le da a $\mathbb{R}^2$ surge del hecho de que uno puede representar un elemento de $\mathbb{R}^2$ como un punto en el esquema de ejes cartesianos (Figura 1.1). Aquí, el número $x$ representa cuánto hay que desplazarse en el sentido del eje horizontal y el número $y$ cuánto en el sentido vertical. De esta manera, a cada punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ le corresponde un punto del plano cartesiano y viceversa. Los números $x$ e $y$ se llaman las *coordenadas* del punto $(x, y)$. El punto $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ se llama *el origen de coordenadas*.

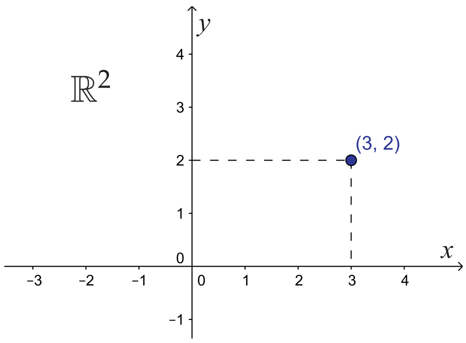


Figura 1.1: Representación en el plano cartesiano de puntos de $\mathbb{R}^2$.

■ **Ejemplos 2** Consideren los siguientes subconjuntos del plano.

1. $P_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leq x \leq 10 \text{ y } 2 \leq y \leq 8\}$.
2. $P_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x = y\}$.
3. $P_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, y = x^2 + 3\}$.

El conjunto $P_1$ coincide con los puntos dentro de un rectángulo de base $10$ y altura $6$. El conjunto $P_2$ son los puntos cuyas coordenadas son iguales. Esto forma una recta en el plano: la recta de ecuación $y = x$. El conjunto $P_3$ son los puntos cuya segunda coordenada es el cuadrado de la primera más $3$. Esto forma una parábola en el plano: la parábola $y = x^2 + 3$. En la Figura 1.2 están representados gráficamente estos conjuntos. ■

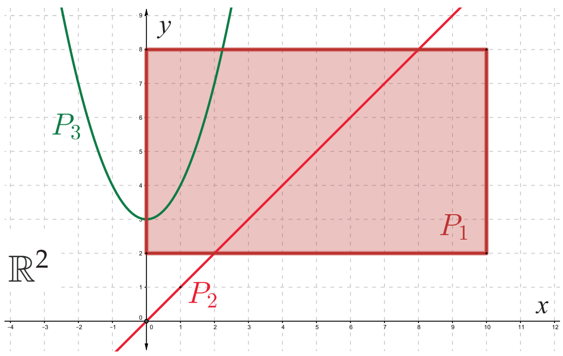


Figura 1.2: El gráfico de los subconjuntos $P_1$, $P_2$ y $P_3$ de $\mathbb{R}^2$.

De manera análoga al plano, se puede considerar $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \,:\, x, y, z \in \mathbb{R}\}$, es decir, el conjunto de ternas ordenadas de números reales. A este conjunto se lo llama *espacio* ya que se identifica con un ambiente tridimensional. El objeto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ se corresponde con el punto del espacio de tres ejes cartesianos perpendiculares, de manera que el número $x$ dice cuánto hay que desplazarse en la dirección de ese eje, y lo mismo ocurre con los números $y$, $z$ y sus respectivos ejes (Figura 1.3). En este caso, $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ es el *origen de coordenadas*.

■ **Ejemplos 3** Consideren los siguientes subconjuntos del espacio.

1. $E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \leq x \leq 5, 2 \leq y \leq 4 \text{ y } 1 \leq z \leq 3\}$.
2. $E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 0\}$
3. $E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x = y = z\}$

El conjunto $E_1$ coincide con los puntos dentro de un paralelepípedo de lados de tamaño $5$, $2$ y $2$. El conjunto $E_2$ son los puntos que se encuentran en el plano $xy$ (aquí consideramos el valor de la coordenada $z$ como la “altura” a la que se

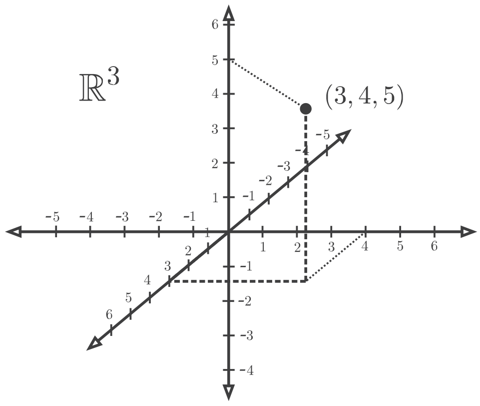


Figura 1.3: Representación en el espacio cartesiano de puntos de $\mathbb{R}^3$.

encuentran los puntos respecto del "piso" $xy$). El hecho de que $z = 0$ nos dice precisamente que se trata de los puntos que se encuentran en el "piso". El conjunto $E_3$ esta conformado por los puntos tales que sus coordenadas son todas iguales. Esto forma una recta en el espacio. En la Figura 1.4 están representados estos conjuntos. ■

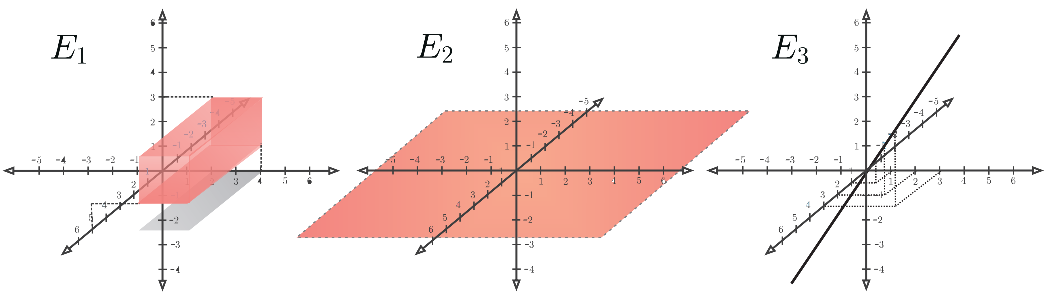


Figura 1.4: El gráfico de los subconjuntos $E_1$, $E_2$ y $E_3$ de $\mathbb{R}^3$.

Generalizando estas ideas, podemos también considerar el conjunto de "tiras ordenadas" de números reales $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$. A una tira como la que acabamos de describir se la llama *$n$-upla ordenada de números reales*. Para $n > 3$ ya no podemos representar las $n$-uplas como puntos en un esquema de ejes cartesianos (el ser humano sólo visualiza hasta tres dimensiones). Al espacio $\mathbb{R}^n$ se lo conoce como el *espacio $n$-dimensional*. El *origen de coordenadas* de $\mathbb{R}^n$ es la $n$-upla $(0, 0, \ldots, 0)$ de $n$ ceros.

**Importante** Cuando mencionemos un objeto de $\mathbb{R}^n$ pero no tengamos la necesidad de especificar sus coordenadas, escribiremos solamente $X \in \mathbb{R}^n$ (utilizando letras mayúsculas). Aquí se entiende que $X = (x_1, \ldots, x_n)$ para ciertos $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. ■

### 1.1.4 Cómo construir conjuntos a partir de otros

Hay operaciones básicas que es necesario hacer con los conjuntos: unión, intersección, diferencia y complemento.

*Unión de conjuntos*. Esta operación consiste en "juntar" el contenido de dos conjuntos.

**Definición 1** Si $A$ y $B$ son conjuntos que viven dentro del mismo universo $\mathcal{U}$, entonces, el nuevo conjunto $A \cup B$, llamado *unión entre $A$ y $B$*, es el que tiene por elementos aquellos que pertenecen a $A$ o a $B$, es decir, *a alguno de los dos*. Simbólicamente se define:

$$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \text{ o } x \in B\}$$

Por ejemplo, con los conjuntos $X = \{1, @, \text{manzana}, \text{naranja}\}$, $Y = \{\text{manzana}, \text{naranja}\}$ y $Z = \{@, \sharp\}$ que consideramos anteriormente, tenemos:

- $X \cup Y = \{\text{manzana}, \text{naranja}, 1, @\}$
- $Y \cup Z = \{\text{manzana}, \text{naranja}, @, \sharp\}$
- $X \cup Z = \{\text{manzana}, \text{naranja}, 1, @, \sharp\}$

Observemos que $X \cup Y = X$. Esto se debe a que $Y \subseteq X$, por lo cual los elementos de $Y$ ya son elementos de $X$ y no se agrega nada nuevo al unirlos.

■ **Ejemplo 4** Consideren ahora un ejemplo numérico. Si $W = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 10\}$ y $V = \{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x \leq 15\}$ entonces $W \cup V = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x \leq 15\}$. Noten que los números reales que están entre 5 y 10 pertenecen tanto a $W$ como a $V$. ■

*Analicen si son válidas las expresiones $A \subseteq (A \cup B)$ y $B \subseteq (A \cap B)$ cualesquiera sean los conjuntos A y B. En particular, estudien qué sucede con $(A \cup B)$ si $A \subseteq B$ . Y qué conjunto es $A \cup \emptyset$ para cualquier conjunto $A$.*

*Intersección de conjuntos*. Esta operación nos permite construir un conjunto que contenga los elementos que tienen en común los dos conjuntos originales.

**Definición 2** El conjunto cuyos elementos pertenecen a $A$ y a $B$ *al mismo tiempo* se llama la *intersección entre* $A$ y $B$ y se nota $A \cap B$. Simbólicamente, se escribe así:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}$$

Con los conjuntos $X = \{1, @, \text{manzana}, \text{naranja}\}$, $Y = \{\text{manzana}, \text{naranja}\}$ y $Z = \{@, \sharp\}$ tenemos:

- $X \cap Y = \{\text{manzana}, \text{naranja}\}$
- $Y \cap Z = \emptyset$
- $X \cap Z = \{@\}$

■ **Ejemplo 5** Con $W$ y $V$, como en el Ejemplo 4, se tiene que $W \cap V = \{x \in \mathbb{R} : 5 \leq x \leq 10\}$. ■

*Analicen si es cierto que las expresiones $(A \cap B) \subseteq A$ y $(A \cap B) \subseteq B$ son válidas cualesquiera sean A y B. Determinen qué conjunto es $A \cap B$ si $A \subseteq B$ y qué conjunto es $A \cap \emptyset$ cualquiera sea el conjunto $A$.*

*Diferencia de conjuntos*. Esta operación consiste en "removerle" a un conjunto $A$ los elementos que son, a su vez, elementos de un conjunto $B$.

**Definición 3** El conjunto que se obtiene al quedarse con los elementos de $A$ que no están en $B$ se llama la *diferencia entre* $A$ y $B$ y se nota $A \setminus B$. Simbólicamente, se escribe de la siguiente manera:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \text{ pero } x \notin B\}$$

Por ejemplo, $X \setminus Y = \{1, @\}$ y $X \setminus Z = \{1, \text{manzana}, \text{naranja}\}$. Notemos que $\sharp \in Z$ pero $\sharp \notin X$. Esto no tiene importancia, porque al escribir $X \setminus Z$ estamos diciendo "el conjunto de los elementos de $X$ que no están en $Z$"; el hecho de que $Z$ tenga un elemento que no esté en $X$ no afecta esta operación.

Por último, definimos un conjunto formado por los elementos que se encuentran *fuera* de un conjunto dado $A$. Esto da lugar a un nuevo conjunto llamado *complemento de* $A$, que se nota $A^c$. Pero, ¿qué significa "afuera"? Por ejemplo, ¿qué hay afuera de $Y = \{\text{manzana}, \text{naranja}\}$? Esto depende de cuál es el universo en el que estamos trabajando. Si trabajamos con el universo de todas las frutas, entonces $Y^c$ es el conjunto de todas las frutas que no son la manzana y la naranja. Si tomamos el universo dado por el conjunto $X = \{\text{manzana, naranja}, 1, @\}$ entonces $Y^c = \{1, @\}$. Por lo tanto, el complemento de un conjunto *siempre* lo es en relación al conjunto universal que estamos considerando.

**Definición 4** El *complemento* de un conjunto $A$ respecto del universo $\mathcal{U}$ es el conjunto de elementos de $\mathcal{U}$ que no están en $A$. Simbólicamente, se representa de la siguiente manera:

$$A^c = \mathcal{U} \setminus A$$

■ **Ejemplo 6** Si $\mathcal{U} = \mathbb{N}$, entonces se tiene que:

$$\{x \in \mathbb{N} \,:\, x \text{ es un número par}\}^c = \{x \in \mathbb{N} \,:\, x \text{ es un número impar}\}.$$

■

**¿Qué hicimos en el apartado 1.1?**

- Repasamos las nociones de pertenencia de un elemento en relación con un conjunto ($\in$) y de inclusión de un conjunto en otro ($\subseteq$).
- Introdujimos el conjunto $\mathbb{R}^2$ de pares ordenados de números reales (y lo identificamos con un plano), el conjunto $\mathbb{R}^3$ de ternas ordenadas de números reales (y lo identificamos con el espacio 3-dimensional) y generalizamos estos conjuntos a las $n$-uplas ordenadas de números reales, obteniendo el conjunto $\mathbb{R}^n$.
- Definimos las operaciones usuales que hacemos con conjuntos: unión de conjuntos ($\cup$), intersección de conjuntos ($\cap$), diferencia de conjuntos ($\setminus$) y complemento de un conjunto respecto del conjunto universal ($A^c$).

■

## 1.2 Vectores de $\mathbb{R}^n$

En este apartado explicaremos los *vectores*. Es probable que tengan la idea intuitiva de que un vector es una flecha, al menos gráficamente. Será de gran utilidad tener presente esta noción para comprender la definición matemática de este concepto.

**En este apartado explicaremos**

- La definición formal de vector.
- La suma de vectores y el producto de un vector por un escalar.
- Las propiedades fundamentales de estas operaciones.

■

### 1.2.1 La noción de vector

Seguramente ustedes ya han utilizado flechas (segmentos orientados) para representar cantidades físicas, como fuerzas aplicadas sobre un cuerpo o dirección de trayectorias. Una flecha queda determinada por su origen (donde comienza) y su extremo (donde termina). Con estos datos, la flecha obtiene una *dirección* (la recta sobre la cual está contenida), *sentido* (dónde empieza y dónde termina) y *módulo* (la longitud de la flecha). Análogamente, si se elige el origen de la flecha, y se especifican su dirección, sentido y módulo, se obtiene el extremo de la misma.

**Definición 5** El *segmento orientado* de origen $A$ y extremo $B$ se llama *vector* $\vec{AB}$ y sus elementos son la *dirección* (recta que contiene a los puntos $A$ y $B$), el *sentido* (desde $A$ hacia $B$) y el *módulo* (la distancia entre los puntos $A$ y $B$).

Cuando se dibujan flechas sobre la hoja de papel, se están dibujando vectores en $\mathbb{R}^2$, debido a que su origen y su extremo son puntos de un plano. Al señalar un avión que está pasando por el cielo, podemos pensar que estamos representando un vector con origen en nuestro hombro y extremo en nuestro dedo índice. Este vector “pertenece” a $\mathbb{R}^3$, ya que son necesarias tres coordenadas para dar la ubicación del hombro y el dedo índice en el espacio. Los vectores que consideraremos en esta materia serán “vectores en $\mathbb{R}^n$”, ya que su origen y su extremo estarán dados por puntos de $\mathbb{R}^n$.

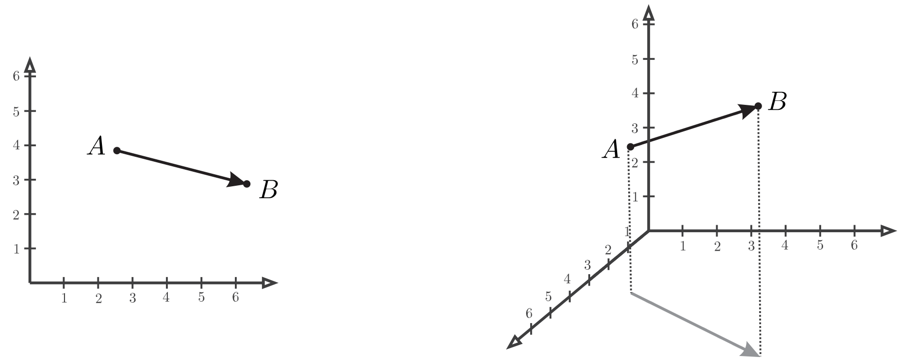


Figura 1.5: Vectores en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

Tengamos en cuenta que la dirección, el sentido y el módulo de un vector son propiedades intrínsecas de este; es decir, son independientes del punto origen del vector. El origen y el extremo de un vector dependen de su posición relativa con respecto a un sistema de coordenadas cartesianas, mientras que la dirección, el sentido y el módulo, no. En este libro, nos importa explicar las características propias de los vectores, independientemente de dónde estén ubicados en el sistema de referencia. Por este motivo, *consideramos que todos los vectores de igual dirección, sentido y módulo son* equivalentes*, es decir, para nuestros propósitos es equivalente estudiar cualquiera de ellos.* Sin embargo, tenemos en cuenta que de todos los vectores de $\mathbb{R}^n$ equivalentes a uno dado, el más sencillo de describir es el que tiene su origen en el origen de coordenadas $(0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$, pues de esta manera, para especificar un vector alcanza con dar su extremo.

**Importante** *En este libro, trabajamos exclusivamente con vectores $\vec{v}$ cuyo origen es el origen de coordenadas $(0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Es decir que al indicar el vector $\vec{v} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$ nos estamos refiriendo al vector con origen en el punto $(0, 0, 0, ..., 0) \in \mathbb{R}^n$ y extremo en el punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.* ■

En particular, el origen de coordenadas también da lugar a un vector: el vector *nulo* (no tiene longitud, ni dirección, ni sentido). Este vector es el único para el cual su origen y extremo coinciden y se denota $\vec{0}$. Observemos que en $\mathbb{R}^2$ el vector nulo es $\vec{0} = (0, 0)$ y en $\mathbb{R}^3$ es $\vec{0} = (0, 0, 0)$. Cuando escribamos $\vec{0}$, nos referiremos siempre al vector nulo del $\mathbb{R}^n$ en el que estemos trabajando en ese momento.

Hay dos operaciones fundamentales a tener en cuenta durante el trabajo con vectores: “sumar dos vectores” y “escalar un vector por un número real”. Estas operaciones tienen un significado en función del contexto en el cual se las utiliza (a veces geométrico y a veces algebraico). Por ejemplo, si hay dos fuerzas aplicadas sobre un cuerpo y